目　　录

第一章　张量分析 ………………………………………… 1

§ 1.1　张量 ………………………………………… 1

§ 1.2　联络与协变微分 ………………………………… 5

§ 1.3　曲率张量 ………………………………………… 14

§ 1.4　标架 ………………………………………… 20

§ 1.5　外微分运算 ………………………………………… 25

§ 1.6　算子 δ 与 Δ ………………………………… 35

§ 1.7　局部映照 ………………………………………… 43

第二章　四维空间

§ 2.1　四维空间的曲率张量 ………………………… 48

§ 2.2　$U(1)$ 规范场；磁单极；电磁辐射条件 ……… 52

§ 2.3　$O(4)$ 规范场；同步对称解；类粒子解 ……… 60

§ 2.4　旋量；$SL(2,C)$ 规范场 ……………………… 65

§ 2.5　Yang-Mills 场 ………………………………… 80

第三章　旋量分析

§ 3.1　常用张量的旋量形式 ………………………… 86

§ 3.2　Weyl 旋量的分类 ……………………………… 97

§ 3.3　Weyl 张量的分类 ……………………………… 107

§ 3.4　Weyl 旋量的特征双向量和主方向 …………… 119

§ 3.5　能量、动量、张量的分类 ……………………… 122

第四章　N-P 方程

§ 4.1　拟正交标架 ………………………………… 145

§ 4.2　Einstein 方程的旋量形式 ……………………… 152

§ 4.3 Goldberg-Sachs 定理 ……159
§ 4.4 平面波前引力波（PP 波）……165
第五章 微分流形
§ 5.1 微分流形与微分映照 ……175
§ 5.2 Stokes 定理 ……184
§ 5.3 Frobenius 定理 ……191
§ 5.4 Sard 定理 ……206
§ 5.5 Whitney 定理 ……214
§ 5.6 横截（transversality）定理 ……223
第六章 黎曼几何
§ 6.1 切丛与线性联络 ……229
§ 6.2 平行移动；测地线 ……234
§ 6.3 黎曼流形 ……240
§ 6.4 相对曲率量；Gauss-Codazzi 方程 ……243
§ 6.5 黎曼联络 ……252
§ 6.6 完备的黎曼流形 ……259
§ 6.7 等度变换 ……264
第七章 测地线的指数和比较定理
§ 7.1 测地线的变分 ……270
§ 7.2 Jacobi 场；测地线的共轭点 ……274
§ 7.3 Gauss 引理的推广 ……280
§ 7.4 测地线的指数式 ……285
§ 7.5 Morse-Schönberg 比较定理 ……294
§ 7.6 Rauch 比较定理 ……301
§ 7.7 Hadamard-Cartan 定理 ……305

第一章　张 量 分 析

§1.1　张　　量

令 R^m 代表所有m个实数 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 组成的空间，x 也称为 R^m 的点．$x^j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为 x 点的坐标．在 R^m 的任两点 x 与 y 之间可以引进一度量

$$|x-y|=\{(x^1-y^1)^2+\cdots+(x^m-y^m)^2\}^{1/2},\qquad(1.1.1)$$

称为欧氏度量．于是可由此定义 R^m 的一拓扑．

设V是 R^m 中的开集，映照 $f:V\to\tilde{V}$ 把V映入 R^n 的一子集 $\tilde{V}$．设 $x\in V$ 映为 $\tilde{x}\in\tilde{V}$，表示为

$$x\longmapsto\tilde{x}=f(x).$$

于是x的坐标 x^j 与 $\tilde{x}$ 的坐标 $\tilde{x}^\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$之间有一函数关系：

$$\tilde{x}^\alpha=f^\alpha(x)=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m),$$

$f^\alpha(x)$称为映照函数．如果所有的 $f^\alpha\in C^r(V)$（$C^r(V)$表示在V中，有 r 次连续偏微分的函数集合），则 f 称为 r 次可微分映照．今后如非有特别说明，为方便起见，我们说可微分函数是指可无穷次微分函数，而微分映照则是指无穷次可微分映照．

目前暂考虑 $\tilde{V}$ 也是 R^m 的开集，微分映照 $f:V\to\tilde{V}$ 是一一对应的，且映照函数

$$\tilde{x}^j=f^j(x)\qquad(1.1.2)$$

的函数方阵

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^m}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^m}\end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

是非异的情形．此时，变换(1.1.2)称为局部坐标变换或简称坐标变换．

令K代表实数域或复数域，$GL(N,K)$表示矩阵元素属于K的 $N\times N$ 非异方阵所成的群．由于 $GL(N,K)$是欧氏空间K^{N^2}的开集，其么元素，即单位方阵 I，必有 K^{N^2} 中的邻域仍然包含于$GL(N,K)$．

设G是 $GL(N,K)$的子群，它满足下述条件：

(i)存在$GL(N,K)$ 单位方阵I的邻域$\mathfrak{V}_\varepsilon$，使得$\mathfrak{W}_\varepsilon=G\cap\mathfrak{V}_\varepsilon$的元素与$R^r$的原点的邻域$W_\varepsilon=\{\sigma=(\sigma^1,\cdots,\sigma^r)\in R^r\,|\,|\sigma^\alpha|<\varepsilon,\ \alpha=1,\ \cdots,\ r\}$ 的点一一地对应，并且如$A\in G\cap\mathfrak{V}_\varepsilon$，$A=(A^\alpha_\beta)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r}$，则

$$A^\alpha_\beta=A^\alpha_\beta(\sigma)=A^\alpha_\beta(\sigma^1,\cdots,\sigma^r)$$

是 σ^α 的实解析函数，其函数矩阵之秩为 r．为简便起见，我们记$A(\sigma)=(A^\alpha_\beta(\sigma))$．此外假定 $A(0)=I$．

(ii)存在实解析函数$\psi(\sigma,\tau)=(\psi^1(\sigma,\tau),\cdots,\psi^r(\sigma,\tau))$，在 $(\sigma,\tau)\in W_{\varepsilon_1}\times W_{\varepsilon_1}$ $(0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon)$ 定义的乘法函数，使得 $\psi(\sigma,\tau)\in W_\varepsilon$，且

$$A(\sigma)A(\tau)=A(\psi(\sigma,\tau)),$$

这时G称为r维矩阵李群．

若 $B_0\in G$，但 $B_0\notin\mathfrak{W}_\varepsilon$，令

$$B_0\mathfrak{W}_\varepsilon=\{B\in G\,|\,B=B_0A,\ A\in\mathfrak{W}_\varepsilon\},$$

则当 $B\in B_0\mathfrak{W}_\varepsilon$ 时，能写为

$$B=B_0A(\sigma),\sigma\in W_\varepsilon,$$

这证明G中的任一元素可用 $\sigma \in W_\varepsilon$ 的参数来表示.

设G是 r 维 $N\times N$ 矩阵李群. 又设任一坐标变换(1.1.2)对应于 $f:V\to\tilde{V}$ 有一映照 $\varphi_{\tilde{V}V}:V\to G$, 使得当 $x\mapsto\varphi_{\tilde{V}V}(x)\in B_0\mathfrak{W}_\varepsilon$ 因而可写 $\varphi_{\tilde{V}V}(x)=B_0A(\sigma)$ 时,参数 σ 是 x 的可微分函数. 此外,如有 $\tilde{f}:\tilde{V}\to\tilde{\tilde{V}}$ 是另一坐标变换,则有

$$\varphi_{\tilde{\tilde{V}}V}(x)=\varphi_{\tilde{\tilde{V}}\tilde{V}}(\tilde{x})\varphi_{\tilde{V}V}(x), \tag{1.1.4}$$

其中 $\varphi_{\tilde{\tilde{V}}V}$ 是相应于坐标变换 $\tilde{f}\circ f:V\to\tilde{\tilde{V}}$ 的映照 $\varphi_{\tilde{\tilde{V}}V}:V\to G$, 而(1.1.4)右边的乘法表示矩阵乘法. 这些 $\varphi_{\tilde{V}V}(x)$称为联接方阵.

在V的x点的一 G 型张量, 即在x点有一组数 $\xi^\alpha(x)$ $(\alpha=1,\cdots,N)$,使得对任一坐标变换(1.1.2)对应于 $\tilde{V}$ 的 $\tilde{x}$ 点有一组数 $\xi^\alpha(\tilde{x})$,适合

$$\xi^\alpha(\tilde{x})=\sum_{\beta=1}^{N}[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\alpha_\beta\xi^\beta(x), \tag{1.1.5}$$

其中 $[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\beta_\alpha$ 是联接方阵 $\varphi_{\tilde{V}V}(x)$ 的矩阵元素.

如果每一点 $x\in V$, 都有一G型向量 $\xi^\alpha(x)$ 是 $x\in V$ 的连续函数, 且联接矩阵也是连续的, 即矩阵的元素是 $x\in V$ 的连续函数,则 $\xi^\alpha(x)$ 称为在V中的G型向量场.通常假定联接矩阵是可微分的. 如 $\xi^\alpha(x)$ 是在V可微分的,则称为V中的可微分的G型向量场.

显然, 所有在x点的G型向量成实数域或复数域下的N维线性空间,用 T^G_x 来表示. T^G_x 的对偶空间用 $\overset{*}{T}{}^G_x$ 表示,众所周知,任一 $\zeta\in\overset{*}{T}{}^G_x$ 存在一组数 $\zeta_\alpha(x)$,使得对任一$\xi\in T^G_x$,其分量为 $\xi^\alpha(x)$ 时有

$$\zeta(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{N}\zeta_\alpha(x)\xi^\alpha(x),$$

其中 $\zeta_\alpha(x)$ 称为 ζ 的分量.显然,经过局部坐标变换(1.1.2),

对应于 $\tilde{x}$ 的分量 $\zeta_\alpha(\tilde{x})$ 满足如下的关系:

$$\zeta_\alpha(\tilde{x}) = \sum_{\beta=1}^{N} \zeta_\beta(x)[\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)]_\alpha^\beta, \tag{1.1.6}$$

其中 $\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)$ 表 $\varphi_{\tilde{V}V}(x)$ 的逆方阵. ζ 称为 G 型协向量. 反之, 如在 V 的点 x 有一组数 $\zeta_\alpha(x)$ 连续依赖于 x,, 对局部坐标变换满足(1. 1.6),则 $\zeta_\alpha(x)$定义一 x 点的 G 型协向量.

最显然的情形是 $G = 1$. 此时的 G 型向量称为标量. 在 V 的标量场即 V 中的函数.

设在 $x \in V$ 有一组量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s = 1, \cdots, N)$, 它经坐标变换 (1. 1. 2) 有如下的变换关系:

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(\tilde{x}) &= [\det\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^\sigma T^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(x) \\ &\times [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha_1}_{\lambda_1}\cdots[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha_r}_{\lambda_r}[\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)]^{\mu_1}_{\beta_1}\cdots[\varphi_{\tilde{V}}^{-1}{}_V(x)]^{\mu_s}_{\beta_s},\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

则称为 x 点的 G 型的权 σ 的 r 阶逆变, s 阶协变张量. 这里我们利用和号省略, 即有指标相同的代表对此指标从 1 到 N 求和. 今后如非特别声明,皆按此规定处理.

当权 $\sigma = 0$, $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$ 简称为 x 点的 G 型的 r 阶逆变 s 阶协变张量.

微分几何中最常见的群 G 是 $GL(m, R)$, 即所有 $m \times m$ 实非异方阵所成的群,而取 $\varphi_{\tilde{V}V}(x) = \dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial x}$. 此时我们不必说是 $GL(m, R)$ 型张量, 而简称为张量便可以了. x 点的向量所成的线性空间就简写为 T_x. x 点的向量最简单的例子是过 x 点的一可微分曲线 $x^i = x^i(t)$ 的切线:

$$\xi^i(x) = \frac{dx^i}{dt},$$

而协变向量的最简单例子是 x 点附近可微分函数 $\phi(x)$ 的偏微分:

$$\zeta_j(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^j}.$$

令

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } j = k; \\ 0, & \text{当 } j \neq k. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

很容易地证明，这是一阶逆变以及一阶协变的张量．又令

$$\delta^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_r} = \begin{vmatrix} \delta^{j_1}_{k_1}\cdots\delta^{j_1}_{k_r} \\ \cdots\cdots \\ \delta^{j_r}_{k_1}\cdots\delta^{j_r}_{k_r} \end{vmatrix}, \tag{1.1.9}$$

这称为 Kronecker δ 符号．容易证明这是 r 阶逆变和 r 阶协变张量．此外，它有如下性质：任两逆变指标互换，或任两协变指标互换时差一负号，并且如果 $j_1,\cdots,j_r$ 中有一指标不同于 $k_1,\cdots,k_r$ 时，则 $\delta^{j_1\cdots j_r}_{k_1\cdots k_r} = 0$.

§1.2 联络与协变微分

设 G 是 r 维 $N\times N$ 矩阵李群，据 §1.1 矩阵李群定义有乘法函数 $\psi^a(\sigma,\tau)(a = 1,\cdots,r)$．令

$$u^a_b(\sigma) = \left[\frac{\partial\psi^a(\sigma,\tau)}{\partial\tau^b}\right]_{\tau=0}, \quad a, b = 1,\cdots,r. \tag{1.2.1}$$

由于 $\psi^a(\sigma,0) = \sigma^a$ 及 $\psi^a(0,\tau) = \tau^a$, 故有 $u^a_b(0) = \delta^a_b(a,b = 1,\cdots,r)$，因此，当正数 ε_1 充分小时，方阵 $(u^a_b(\sigma))_{1\leq a,b\leq r}$ 当 $\sigma\in W_{\varepsilon_1}$ 是非异的．令 $(v^a_b(\sigma))_{1\leq a,b\leq r}$ 是它的逆方阵．由 § 1.1 矩阵李群定义的条件 (ii) 可知，当 $A(\sigma), A(\tau)\in \mathfrak{W}_{\varepsilon_1}$ 时，有

$$A(\sigma)\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau^a} = \sum_{b=1}^{r}\frac{\partial A(\psi)}{\partial\psi^b}\frac{\partial\psi^b(\sigma,\tau)}{\partial\tau^a}, a = 1,\cdots,r. \tag{1.2.2}$$

取 $\tau = 0$，而令

$$T_a = \left[\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau^a}\right]_{\tau=0}, \quad a = 1, \cdots, r, \qquad (1.2.3)$$

这是 $N \times N$ 常数方阵，它们是线性独立的，如若不然，有一组数 $\lambda^1, \cdots, \lambda^r$ 使得 $\sum_{a=1}^{r} \lambda^a T_a = 0$，于是有

$$\sum_{a=1}^{r} \lambda^a \left[\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau^a}\right]_{\tau=0} = 0.$$

令 $A(\tau) = (A^\alpha_\beta(\tau))_{1\leq\alpha,\beta\leq r}$，上式即

$$\sum_{c=1}^{r} \lambda^c \left[\frac{\partial A^\alpha_\beta(\tau)}{\partial \tau^c}\right]_{\tau=0} = 0,$$

这与 §1.1 矩阵李群的定义 (i) 中所说 $A^\alpha_\beta(\tau)$ 的函数矩阵之秩为 r 相矛盾。令 $\mathfrak{g}$ 为以 $T_1, \cdots, T_r$ 为基生成的线性空间，T_a 称为对于参数 $\sigma^1, \cdots, \sigma^r$ 的自然基。令 $\tau = 0$，我们由 (1.2.2)，得出

$$A(\sigma)T_a = \sum_{b=1}^{r} \frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} u^b_a(\sigma),$$

或者

$$A^{-1}(\sigma)\frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} = \sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma) T_a, \; b = 1, \cdots, r. \qquad (1.2.4)$$

若 $B \in B_0\mathfrak{W}_\varepsilon$，便能写成 $B = B_0 A(\sigma)$，此时有

$$B^{-1}\frac{\partial B}{\partial \sigma^b} = A^{-1}\frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} = \sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma) T_a, \; b = 1, \cdots, r,$$

这证明对 G 中任一方阵 B，$B^{-1}\dfrac{\partial B}{\partial \sigma^a}$ 能够用常数方阵 T_a 的线性组合来表示，其系数 $v^a_b(\sigma)$ 是 σ 的实解析函数。

当 $\sigma, \tau \in \mathfrak{W}_{\varepsilon_1}$，由

$$\sum_{a=1}^{r} v_b^a(\sigma) A^{-1}(\tau) T_a A(\tau)$$

$$= A^{-1}(\tau) A^{-1}(\sigma) \frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma^b} A(\tau). \qquad (1.2.4)'$$

我们对(1.2.4)微分，有

$$A^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma^a \partial \sigma^b} - A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \sigma^a} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \sigma^b} = \sum_{d=1}^{r} \frac{\partial v_b^d}{\partial \sigma^a} T_d.$$

把 a 与 b 交换而相减，得出

$$A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \sigma^a} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \sigma^b} - A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \sigma^b} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \sigma^a}$$

$$= \sum_{d=1}^{r} \left(\frac{\partial v_a^d}{\partial \sigma^b} - \frac{\partial v_b^d}{\partial \sigma^a} \right) T_d.$$

取 $\sigma = 0$，而令常数

$$C_{ab}^d = \left[\frac{\partial v_a^d(\sigma)}{\partial \sigma^b} - \frac{\partial v_b^d(\sigma)}{\partial \sigma^a} \right]_{\sigma=0},$$

便有

$$T_a T_b - T_b T_a = \sum_{d=1}^{r} C_{ab}^d T_d.$$

在 $\mathfrak{y}$ 中引进如下乘法：

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a.$$

如 $X, Y \in \mathfrak{y}, X = \Sigma \lambda^a T_a, Y = \Sigma \mu^a T_a$，则

$$[X, Y] = \sum_{a,b=1}^{r} \lambda^a \mu^b [T_a, T_b].$$

上面已经证明

$$[T_a, T_b] = \sum_{d=1}^{r} C_{ab}^d T_d,$$

因此 $[X,Y]\in\mathfrak{y}$. $\mathfrak{y}$ 称为矩阵李群 G 的李代数，C^d_{ab} 称为对于基 T_a的结构常数.

当 $\sigma,\tau\in\mathfrak{W}_{\varepsilon_1}$，由（1.2.4)′可知

$$\sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma)A^{-1}(\tau)T_aA(\tau)=A^{-1}(\tau)A^{-1}(\sigma)\frac{\partial A(\sigma)}{\partial\sigma^b}A(\tau)$$

$$=A^{-1}(\tau)A^{-1}(\sigma)A(\tau)\frac{\partial A^{-1}(\tau)A(\sigma)A(\tau)}{\partial\sigma^b}.$$

由于 $[A(\tau)]^{-1}$ 的矩阵元素仍然是 τ 的实解析函数,而

$$A^{-1}(\tau)A(\sigma)A(\tau)=A^{-1}(\tau)A(\phi(\sigma,\tau))\in G,$$

因此,它能够用 W_{ε_1} 的参数 Ψ^a 表示,即

$$A^{-1}(\tau)A(\sigma)A(\tau)=A(\Psi(\sigma,\tau)). \qquad (1.2.5)$$

我们得出

$$\sum_{a=1}^{r} v^a_b(\sigma)A^{-1}(\tau)T_aA(\tau)$$

$$=A^{-1}(\Psi(\sigma,\tau))\frac{\partial A(\Psi(\sigma,\tau))}{\partial\Psi^a}\frac{\partial\Psi^a(\sigma,\tau)}{\partial\sigma^b}$$

$$=\sum_{b,c=1}^{r} v^c_a(\Psi(\sigma,\tau))\frac{\partial\Psi^a(\sigma,\tau)}{\partial\sigma^b}T_c.$$

令 $\sigma=0$，于是有 $A(\Psi(0,\tau))=I$，即 $\Psi(0,\tau)=0$，因此得出

$$A^{-1}(\tau)T_bA(\tau)=\sum_{c=1}^{r}[Ad(\tau)]^c_bT_c, \qquad (1.2.6)$$

其中

$$[Ad(\tau)]^c_b=\left[\frac{\partial\Psi^c(\sigma,\tau)}{\partial\sigma^b}\right]_{\sigma=0}.$$

设 $\xi^a(x)$ 是 V 中 G 型可微分向量场,于是经过坐标变换

(1.1.2)，有

$$\tilde{\xi}^{\alpha}(\tilde{x}) = \xi^{\beta}(x)[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha}_{\beta},$$

微分后有

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} = \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{k}}[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha}_{\lambda}\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} + \xi^{\lambda}\frac{\partial[\varphi_{\tilde{V}V}(x)]^{\alpha}_{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\beta}}. \quad (1.2.7)$$

从上式中可看出，ξ^{λ} 的微分不再成为G型张量，为了设法使之成为另一矩阵李群 G_1 型的张量，我们引进一个联络的概念。

设G是r维 $N\times N$ 矩阵群. 在V中有一G型联络，即对于G的一组基方阵 T_a 有一组V中可微分量 $\Gamma^a_j(x)(a=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,m)$，使得经坐标变换(1.1.2)，在 $\tilde{V}$ 中相应的量 $\tilde{\Gamma}^a_j(\tilde{x})$ 有如下的关系：

$$\sum_{a=1}^{r}\tilde{\Gamma}^a_j(\tilde{x})T_a = \Bigg[\varphi_{\tilde{V}V}(x)\sum_{a=1}^{r}\Gamma^a_k(x)T_a\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x) - \frac{\partial\varphi_{\tilde{V}V}(x)}{\partial x^k}\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)\Bigg]\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (1.2.8)$$

令 $\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)=\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x})$ 的参数为 $\varphi^a_{V\tilde{V}}(\tilde{x})$，$a=1,\cdots,r$，于是由(1.2.4)，有

$$\frac{\partial\varphi_{\tilde{V}V}(x)}{\partial \tilde{x}^j}\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x) = -\varphi_{\tilde{V}V}(x)\frac{\partial\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}(x)}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$= -\varphi^{-1}_{V\tilde{V}}(\tilde{x})\frac{\partial\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial\varphi^a_{V\tilde{V}}}\frac{\partial\varphi^a_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$= -\sum_{a,b=1}^{r}v^b_a(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))\frac{\partial\varphi^a_{V\tilde{V}}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j}T_b,$$

其中 $v^b_a(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))$ 表示 $v^b_a(\varphi^1_{V\tilde{V}}(\tilde{x}),\cdots,\varphi^r_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))$。

根据(1.2.6)，可把(1.2.8)写成

$$\tilde{\Gamma}_j^a(\tilde{x}) = \sum_{b=1}^{r} Ad(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x}))_b^a \Gamma_k^b \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$+ \sum v_b^a(\varphi_{V\tilde{V}}(\tilde{x})) \frac{\partial \varphi_{V\tilde{V}}^b(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j}. \tag{1.2.9}$$

另一方面，若令

$$T_a = (T_{a\beta}^{\alpha})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N}, \tag{1.2.10}$$

及

$$\Gamma_{\beta k}^{\alpha} = \sum_{a=1}^{r} \Gamma_k^a T_{a\beta}^{\alpha}, \tag{1.2.11}$$

则 (1. 2. 8) 写成矩阵元素的形式为

$$\tilde{\Gamma}_{\beta j}^{\alpha}(\tilde{x}) = [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]_{\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu k}^{\lambda}(x) [\varphi_{\tilde{V}V}^{-1}(x)]_{\beta}^{\mu} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$- \frac{\partial [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]_{\lambda}^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^j} [\varphi_{\tilde{V}V}^{-1}(x)]_{\beta}^{\lambda}. \tag{1.2.12}$$

有时我们称满足上面条件的 $\Gamma_{\beta j}^{\alpha}(x)$ 为 G 型联络。

我们可定义 G 型向量场 $\xi^{\alpha}(x)$ 的对于联络 $\Gamma_{\beta j}^{\alpha}$ 的协变微分为

$$\xi^{\alpha}_{;j} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^j} + \xi^{\beta} \Gamma_{\beta j}^{\alpha}, \tag{1.2.13}$$

则由(1. 2. 12)可知，对于坐标变换有

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^j} + \xi^{\beta} \tilde{\Gamma}_{\beta j}^{\alpha} = \left(\frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^k} + \xi^{\mu} \Gamma_{\mu k}^{\lambda} \right) [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]_{\lambda}^{\alpha} \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \tilde{\chi}^j},$$

此即

$$\tilde{\xi}^{\alpha}_{;j} = \xi^{\beta}_{;k} [\varphi_{\tilde{V}V}(x)]_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}, \tag{1.2.14}$$

这说明 $\xi^{\beta}_{;k}$ 是 G_1 型张量，其中 $G_1 = G \times GL(m, R)$，G_1 的元素是由直乘 $A \times B$ 组成的，$A \in G$，$B \in GL(m, R)$，

联接方阵 $\psi_{\tilde{V}V}(x)$ 是如下的定义：

$$\psi_{\tilde{V}V}(x)=\varphi_{\tilde{V}V}(x)\times\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right)^{\prime-1}, \qquad (1.2.15)$$

其中 B' 表矩阵 B 的转置。这里 $r\times s$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1^1\cdots a_s^1\\ \cdots\cdots\\ a_1^r\cdots a_s^r\end{pmatrix}$$

与 $m\times n$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix}b_1^1\cdots b_n^1\\ \cdots\cdots\\ b_1^m\cdots b_n^m\end{pmatrix}$$

的直乘 $A\times B$ 即 $rm\times sn$ 矩阵为

$$A\times B=\begin{pmatrix}a_1^1B\cdots a_s^1B\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_1^rB\cdots a_s^rB\end{pmatrix}.$$

至于 G 型的权 σ 的 r 阶逆变， s 阶协变的张量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ 的对于联络 $\Gamma^\alpha_{\beta j}$ 的协变微分可作如下定义：

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s;j}=\frac{\partial}{\partial x^j}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}+\sum_{l=1}^{r}T^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\alpha\alpha_{l+1}\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_s}\Gamma^{\alpha_l}_{\alpha j}$$

$$-\sum_{l=1}^{s}T^{\alpha_1\cdots\cdots\cdots\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_{l-1}\beta\beta_{l+1}\cdots\beta_s}\Gamma^{\beta}_{\beta_l j}+\sigma T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\Gamma^{\alpha}_{\alpha j}. \qquad (1.2.16)$$

从计算中可得出，对于局部坐标变换(1.1.2)有如下的关系式：

$$\tilde{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s;j}=(\det\varphi_{\tilde{V}V})^{\sigma}T^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s;k}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^j}$$

$$\times[\varphi_{\tilde{V}V}]^{\alpha_1}_{\lambda_1}\cdots[\varphi_{\tilde{V}V}]^{\alpha_r}_{\lambda_r}[\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}]^{\mu_1}_{\beta_1}\cdots[\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}]^{\mu_s}_{\beta_s}. \qquad (1.2.17)$$

注意在计算上式时，必须用到由(1.2.12)所导出的变换公式：

$$\tilde{\Gamma}^{a}_{aj} = \Gamma^{a}_{ak}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\log|\det\varphi_{\tilde{V}V}|. \qquad (1.2.18)$$

此外，不难证明，两 G 型张量的乘积的协变微分满足普通的微分规则，即

$$(T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}S^{\lambda_1\cdots\lambda_\mu}_{\mu_1\cdots\mu_\nu})_{;j} = T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s;j}S^{\lambda_1\cdots\lambda_\mu}_{\mu_1\cdots\mu_\nu} + T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}S^{\lambda_1\cdots\lambda_\mu}_{\mu_1\cdots\mu_\nu;j}. \qquad (1.2.19)$$

在上节中曾说明，微分几何中常用的群 G 是全线性群 $GL(m,R)$，此时的 G 型联络称为线性联络。现设 Γ^i_{jk} 是线性联络，联接方阵 $\varphi_{\tilde{V}V}(x) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$.

设 ζ_i 是 V 中的协变向量场，它的协变微分，根据定义为

$$\zeta_{i;j} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \zeta_k\Gamma^k_{ij},$$

由此可知

$$\zeta_{i;j} - \zeta_{j;i} = \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) + T^k_{ij}\zeta_k,$$

显然

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}$$

是一个二阶协变张量，因此

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij} \qquad (1.2.20)$$

也是一个二阶协变张量，对于指标 i, j 是反对称的。此张量称为挠率张量。

如果 V 中有一个二阶协变可变分张量场 g_{jk}，它是对称的，即

$$g_{jk} = g_{kj}, \qquad (1.2.21)$$

并且是非异的，即行列式

$$g = \begin{vmatrix} g_{11}\cdots g_{1m} \\ \cdots\cdots \\ g_{m1}\cdots g_{mm} \end{vmatrix} \qquad (1.2.22)$$

在 V 中不为零，则可定义 g_{jk} 所构成的方阵的逆方阵，其元素记为 g^{jk}，即

$$g^{jk}g_{kl} = \delta^j_l, \tag{1.2.23}$$

显然 g^{jk} 是二阶逆变张量场.

由可微分的、对称的、实非异的二阶协变张量场 g_{jk} 可以定义 Christoffel 符号:

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right), \tag{1.2.24}$$

它对于指标 j, k 是对称的. 从计算中可得出，对于局部坐标变换有如下关系:

$$\widetilde{\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} p \\ qr \end{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k}, \tag{1.2.25}$$

由此可知，$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$定义了一个线性联络，称为黎曼联络. 由于它对指标 j, k 是对称的，故挠率为零. 对此线性联络，V 中向量场 ξ^j 的协变微分

$$\xi^j{}_{;k} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + \xi^l \begin{Bmatrix} j \\ lk \end{Bmatrix} \tag{1.2.26}$$

对于坐标变换有

$$\tilde{\xi}^j{}_{;k} = \xi^p{}_{;q} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^k}. \tag{1.2.27}$$

对于权 σ 的张量的协变微分为

$$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + \sum_{l=1}^{r} T^{i_1\cdots i_{l-1} i i_{l+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots\cdots\cdots\cdots j_s} \begin{Bmatrix} i_l \\ ik \end{Bmatrix}$$

$$- \sum_{l=1}^{s} T^{i_1\cdots\cdots\cdots\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{l-1} j j_{l+1}\cdots j_s} \begin{Bmatrix} j \\ j_l k \end{Bmatrix} + \sigma T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial \log\sqrt{|g|}}{\partial x^j}, \tag{1.2.28}$$

这里利用了公式

$$\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\} = \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^k}, \quad g = \det(g_{jk}). \tag{1.2.29}$$

值得注意的是，不难证明

$$g_{jk;l} = 0. \tag{1.2.30}$$

§ 1.3 曲 率 张 量

对于G型的联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$，可以定义一个张量

$$R^{\alpha}_{\beta jk} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta j}}{\partial x^k} + \Gamma^{\gamma}_{\beta k}\Gamma^{\alpha}_{\gamma j} - \Gamma^{\gamma}_{\beta j}\Gamma^{\alpha}_{\gamma k}, \tag{1.3.1}$$

称为G型曲率张量，它对于局部坐标变换有

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\beta ij} = R^{\lambda}_{\mu kl}[\varphi_{\tilde{V}V}]^{\alpha}_{\lambda}[\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}]^{\mu}_{\beta}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}. \tag{1.3.2}$$

若令

$$R^{\alpha}_{\beta ij,k} = \frac{\partial}{\partial x^k}R^{\alpha}_{\beta ij} + R^{\lambda}_{\beta ij}\Gamma^{\alpha}_{\lambda k} - R^{\alpha}_{\lambda ij}\Gamma^{\lambda}_{\beta k},$$

这在任意的坐标变换下不再是一张量，但是有

$$R^{\alpha}_{\beta ij,k} + R^{\alpha}_{\beta jk,i} + R^{\alpha}_{\beta ki,j} = 0, \tag{1.3.3}$$

此式称为 Bianchi 恒等式，可由直接计算得到． 如果V中有联接方阵 $\varphi_{\tilde{V}V} = \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$ 的线性联络 B^i_{jk} 对指标 j, k 是对称的，则可定义 $R^{\alpha}_{\beta ij}$ 的协变微分为

$$R^{\alpha}_{\beta ij;k} = \frac{\partial}{\partial x^k}R^{\alpha}_{\beta ij} + R^{\lambda}_{\beta ij}\Gamma^{\alpha}_{\lambda k} - R^{\alpha}_{\lambda ij}\Gamma^{\lambda}_{\beta k}$$
$$- R^{\alpha}_{\beta lj}B^l_{ik} - R^{\alpha}_{\beta il}B^l_{jk}. \tag{1.3.4}$$

而(1.3.3)可以写成

$$R^{\alpha}_{\beta ij;k} + R^{\alpha}_{\beta jk;i} + R^{\alpha}_{\beta ki;j} = 0, \tag{1.3.5}$$

其中每一项皆是具有如下变换关系的张量:

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\beta ij;k} = R^{\lambda}_{\mu pq;r}[\varphi_{\tilde{V}V}]^{\alpha}_{\lambda}[\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}]^{\mu}_{\beta}\frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}. \qquad (1.3.6)$$

此时亦可定义G型向量场 ξ^α 的高次协变微分,例如

$$\xi^{\alpha}{}_{;jk} = \frac{\partial \xi^{\alpha}{}_{;j}}{\partial x^k} + \xi^{\beta}{}_{;j}\Gamma^{\alpha}_{\beta k} - \xi^{\alpha}{}_{;l}B^{l}_{jk}.$$

由此易见

$$\xi^{\alpha}{}_{;jk} - \xi^{\alpha}{}_{;kj} = -\xi^{\beta}R^{\alpha}_{\beta jk}. \qquad (1.3.7)$$

或者更一般地,对于G型张量,有 Ricci 恒等式:

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s;jk} - T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s;kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{s} T^{\alpha_1\cdots\cdots\cdots\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_{l-1}\beta\beta_{l+1}\cdots\beta_s}R^{\beta}_{\beta_l jk} - \sum_{l=1}^{r} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\alpha\alpha_{l+1}\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_s}R^{\alpha_l}_{\alpha jk}.$$

$$(1.3.8)$$

如果G型联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta_j}$ 使得曲率张量 $R^{\alpha}_{\beta jk} = 0$, 称为平(flat)联络. 如果在$V$中, $\Gamma^{\alpha}_{\beta_j} = \phi^{-1\alpha}_{\gamma}\dfrac{\partial \phi^{\gamma}_{\beta}}{\partial x^j}$,其中 ϕ^{α}_{β} 是V中可微分的,且方阵(ϕ^{α}_{β})非异,其逆方阵的元素为 $\phi^{-1\alpha}_{\beta}$, 则由

$$\frac{\partial \phi^{-1\alpha}_{\beta}}{\partial x^j} = -\phi^{-1\alpha}_{\gamma}\frac{\partial \phi^{\gamma}_{\delta}}{\partial x^j}\phi^{-1\delta}_{\beta},$$

可知满足 $R^{\alpha}_{\beta jk} = 0$, 即 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$ 是平联络.

注意G型联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$ 的研究,近年来在物理学的规范场理论中相当流行. 曲率张量在物理上称为规范场强,而联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$ 在物理上称为规范势,通常要求它满足下面的方程:

$$g^{jk}R^{\alpha}_{\beta ij;k} = 0, \qquad (1.3.9)$$

这称为杨振宁方程.

现在回到微分几何通常所用的张量, 对于黎曼联络$\left\{ {i \atop jk} \right\}$

所定义的曲率张量

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} i \\ jl \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^l}\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ jl \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ rl \end{Bmatrix}, \tag{1.3.10}$$

称为黎曼曲率张量,可以下降其逆变指标:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= g_{ir}R^r_{jkl} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) \\ &\quad + g_{rs}\left(\begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ il \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ jl \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix}\right), \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

这也称为黎曼曲率张量. 由此易见,它满足

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{klij}, \tag{1.3.12}$$

及

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0. \tag{1.3.13}$$

设 ξ^i, ζ^i 是 x 点的两逆变向量，对于此两方向的黎曼曲率,定义为

$$K(x, \xi, \zeta) = \frac{R_{ijkl}\xi^i\zeta^j\xi^k\zeta^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\xi^i\zeta^j\xi^k\zeta^l}. \tag{1.3.14}$$

令

$$R_{jl} = R^i_{jil}, \tag{1.3.15}$$

这称为 Ricci 曲率张量，由(1. 1. 12)易知，它是对称的，即 $R_{jl} = R_{lj}$. ξ^i 方向的 Ricci 曲率定义为

$$K(x, \xi) = \frac{R_{jl}\xi^j\xi^l}{g_{ki}\xi^k\xi^i}. \tag{1.3.16}$$

标量

$$R = g^{jl}R_{jl} \tag{1.3.17}$$

称为标量曲率。

现在 Bianchi 恒等式(1.3.5)可以写为

$$R^r_{sij;k} + R^r_{sjk;i} + R^r_{ski;j} = 0. \tag{1.3.18}$$

把上式指标 r 与 i 拼缩,即令 $r = i$, 且对 i 从 1 到 m 求和,便有

$$R_{sj;k} + R^i_{sjk;i} - R_{sk;j} = 0,$$

再乘上式以 g^{sk}, 并对指标 s, k 求和,有

$$g^{sk}R_{sj;k} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^j}.$$

因此,若令

$$T_{jk} = R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}R + \Lambda g_{jk}, \tag{1.3.19}$$

其中 Λ 为常数,则有

$$g^{kl}T_{jk;l} = 0. \tag{1.3.20}$$

反之,若给与 T_{jk} 满足(1.3.20),而求在 V 中非异对称张量 g_{jk} 满足方程(1.3.18),则方程(1.3.19)称为 Einstein 方程,这是引力理论中最基本的方程,特别是 $T_{jk} = 0$ 时,方程化为下面的形式:

$$R_{jk} = \lambda g_{jk}. \tag{1.3.21}$$

如 V 存在 g_{jk} 满足上述方程,称为 Einstein 空间. 以 g^{jk} 乘(1.3.21), 得出 $R = m\lambda$, 即方程化为

$$R_{jk} = \frac{R}{m}g_{jk},$$

由此可知

$$R_{jk;l} = \frac{g_{jk}}{m}\frac{\partial R}{\partial x^l}.$$

因此易证,当 $m \neq 2$ 时,标量曲率必须是常数,因而方程(1.3.21)中 λ 必须是常数。

用同样方法可以证明，当 $m > 2$ 时，如果曲率(1.3.4)与方向 ξ^i, ζ^i 无关，即

$$R_{ijkl} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})K,$$

则 K 必为常数. 因为用 $g^{ik}g^{jl}$ 乘上式，便可得出 $R = m(m-1)K$，又由

$$g^{ik}g^{hl}R_{ijkl;h} = g^{ik}g^{hl}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})K_{;h},$$

此即

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial x^j} = \frac{1}{m}\frac{\partial K}{\partial x^j}.$$

现设 $\overset{(1)}{g}_{ik}$ 是 V 中另一可微分的、对称的非异的二阶协变张量，于是有相应的 Christoffel 符号 $\overset{(1)}{\left\{ {i \atop jk} \right\}}$ 及曲率张量 $\overset{(1)}{R}{}^i_{jkl}$ 等. 若

$$\overset{(1)}{g}_{ij} = e^{2\sigma}g_{ij},$$

其中 σ 是 V 中可微分实函数，则由计算可知

$$\overset{(1)}{\left\{ {i \atop jk} \right\}} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \delta^i_k\sigma_j + \delta^i_j\sigma_k - g_{jk}g^{il}\sigma_l, \tag{1.3.22}$$

其中

$$\sigma_j = \frac{\partial\sigma}{\partial x^j}.$$

再根据曲率张量的定义，可计算得出

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{R}{}^i_{jkl} &= R^i_{jkl} + \delta^i_l\sigma_{jk} - \delta^i_k\sigma_{jl} \\ &+ g^{ih}(g_{jk}\sigma_{hl} - g_{jl}\sigma_{hk}) + (\delta^i_l g_{jk} - \delta^i_k g_{jl})g^{rs}\sigma_r\sigma_s,\end{aligned} \tag{1.3.23}$$

其中

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i;j} - \sigma_i\sigma_j.$$

由 (1.3.17) 得出

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{R}_{jk} = R_{jk} - (m-2)\sigma_{jk} - g_{jk}[g^{il}\sigma_{i;l} \\ + (m-2)g^{il}\sigma_i\sigma_l],\end{aligned} \tag{1.3.24}$$

及

$$\overset{(1)}{R} = e^{-2\sigma}[R - 2(m-1)g^{il}\sigma_{i;l} - (m-1)(m-2)g^{il}\sigma_i\sigma_l]. \tag{1.3.25}$$

由(1.3.23)—(1.3.25)可知，当 $m \geqslant 3$ 时，有

$$\overset{(1)}{C}{}^i_{jkl} = C^i_{jkl}, \tag{1.3.26}$$

其中

$$C^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \frac{1}{m-2}(\delta^i_l R_{jk} - \delta^i_k R_{jl} + g_{jk}R^i_l - g_{jl}R^i_k) - \frac{R}{(m-1)(m-2)}(\delta^i_l g_{jk} - \delta^i_k g_{jl}), \tag{1.3.27}$$

此张量称为 Weyl 张量或共形张量. 上面证明两个非异对称张量，若只差一正的因子，则它们的 Weyl 张量相等.

显而易见，如果 a_{jk} 是对称的，则把 $a_{jk}b_l—a_{jl}b_k$ 的指标 j, k, l 轮换然后相加，必定恒等于零，因此，根据(1.3.13)可知

$$C^i_{jkl} + C^i_{klj} + C^i_{ljk} = 0. \tag{1.3.28}$$

令

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= g_{ih}C^h_{jkl} \\ &= R_{ijkl} + \frac{1}{m-2}(g_{il}R_{jk} - g_{ik}R_{jl} + g_{jk}R_{il} - g_{jl}R_{ik}) \\ &\quad - \frac{R}{(m-1)(m-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) = R_{ijkl} \\ &\quad - \frac{1}{m-2}(g_{i[k}R_{l]j} - g_{j[k}R_{l]i}) \\ &\quad + \frac{R}{(m-1)(m-2)}g_{i[k}g_{l]j}, \end{aligned} \tag{1.3.29}$$

其中 $A_{i[k}B_{l]j} = A_{ik}B_{lj} - A_{il}B_{kj}$. 由 (1.3.12) 可知

$$C_{ijkl} = -C_{ijlk} = -C_{jikl} = C_{klij}. \tag{1.3.30}$$

由（1.3.27）可知

$$C^k_{jkl}=0. \tag{1.3.31}$$

值得注意的是，当 $m=3$ 时，可以证明 Weyl 张量恒等于零(参阅[1]).

§1.4 标 架

在 R^m 的开集 V 中，若有 m 个微分向量场 $e^j_{(1)}(x),\cdots,e^j_{(m)}(x)$，在每一点 $x\in V$ 是线性独立的，则称为 V 中的一组标架 $\{e^j_{(a)}\}$。如果取 $e^j_{(a)}=\delta^j_a$，此标架称为自然标架。

如果 $\{\tilde e^j_{(a)}(x)\}$ 是 V 中另一组标架，则必有 V 中的可微分函数 $A^b_a(x)$，使得

$$e^j_{(a)}(x)=A^b_a(x)\tilde e^j_{(b)}(x), \tag{1.4.1}$$

这称为标架的变换。令 $e^{(1)}_j(x),\cdots,e^{(m)}_j(x)$ 是由方程

$$e^k_{(a)}e^{(a)}_j=\delta^k_j \tag{1.4.2}$$

所确定的量，满足

$$e^j_{(a)}e^{(b)}_j=\delta^b_a. \tag{1.4.3}$$

不难证明，对每一固定的 a，$e^{(a)}_j(x)$ 是 V 中的可微分协变向量场。$\{e^{(a)}_j\}$ 称为相应于 $\{e^j_{(a)}\}$ 的协标架。

在 §1.1 中，我们曾定义 x 点的向量，它是对自然标架定义的。由此而定义的张量也是对自然标架定义的。我们现在为区别起见，用 $\mathring{\xi}^i,\mathring{T}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 等来表示。

对于自然标架的权 σ 的 r 阶逆变 s 阶协变张量 $\mathring{T}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 对应有唯一的对于标架 $\{e^j_{(a)}\}$ 的张量

$$T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}=(\det \mathrm{E})^{-\sigma}\mathring{T}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}{}^{(a_1)}\cdots e_{i_r}{}^{(a_r)}e^{j_1}{}_{(b_1)}\cdots e^{j_s}{}_{(b_s)}, \tag{1.4.4}$$

称为对于标架 $\{e^j_{(a)}\}$ 的张量，这里

$$E = \begin{pmatrix} e^1_{(1)} \cdots e^1_{(m)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ e^m_{(1)} \cdots e^m_{(m)} \end{pmatrix}. \tag{1.4.5}$$

显然 $T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$ 与坐标的选取无关，因对于局部坐标的变换(1.1.2),(1.4.4)右边是不变的,因为对于坐标变换(1.1.2),标架向量的变换为

$$\tilde{e}^j_{(a)}(\tilde{x}) = e^k_{(a)}(x)\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k}, \quad \tilde{e}^{(a)}_j(\tilde{x}) = e^{(a)}_k(x)\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}, \tag{1.4.6}$$

因而有

$$T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} = (\det \tilde{E})^{-\sigma}\overset{\circ}{\tilde{T}}{}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\tilde{e}^{(a_1)}_{i_1}\cdots\tilde{e}^{(a_r)}_{i_r}\tilde{e}^{j_1}_{(b_1)}\cdots\tilde{e}^{j_s}_{(b_s)}.$$

但对于标架的变换(1.4.1)，若令 $\tilde{T}^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$ 为对于新的标架 $\{\tilde{e}^j_{(a)}\}$ 的张量,便有

$$\tilde{T}^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} = (\det A)^\sigma T^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}A^{a_1}_{c_1}\cdots A^{c_s}_{c_r}A^{-1d_1}_{b_1}\cdots A^{-1d_s}_{b_s}, \tag{1.4.7}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 \cdots A^1_m \\ \cdots\cdots \\ A^m_1 \cdots A^m_m \end{pmatrix}, \tag{1.4.8}$$

这里 A^{-1a}_b 表示逆方阵 A^{-1} 的元素.

对于局部坐标变换 $f: V \to \tilde{V}$，若在 $\tilde{V}$ 中任取一组标架 $\{\tilde{e}^j_{(a)}(\tilde{x})\}$，它与由 V 变换而来的标架 $e^k_{(a)}(x)\dfrac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k}$ 之间,必然差一线性变换 $A^a_b(x)$，即

$$e^j_{(a)}(x)\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} = A^b_a(x)\tilde{e}^k_{(b)}. \tag{1.4.9}$$

对于如此的标架 $\{\tilde{e}^j_{(a)}(\tilde{x})\}$ 定义的张量 $\tilde{T}^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$，与原来的对于标架 $\{e^j_{(a)}(x)\}$ 定义的张量 $T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$ 之间,仍然有关系(1.4.7).

从(1.4.7)中可看出，$T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$ 是 $G = GL(m, R)$ 类型张量，而对于坐标变换 $f: V \to \tilde{V}$ 的联接方阵为

$$\varphi_{\tilde{V}V}(x) = A(x) = \tilde{E}^{-1}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}E.$$

令 Γ^i_{jk} 是 § 1.2 中所定义的线性变换，对于坐标变换 $f: V \to \tilde{V}$ 的联接函数为 $\varphi_{\tilde{V}V}(x) = \dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial x}$. 此即对于坐标变换 (1.1.2)，有

$$\tilde{\mathring{\Gamma}}^i_{jk} = \mathring{\Gamma}^p_{qr}\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial\tilde{x}^k} + \frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial\tilde{x}^j\partial\tilde{x}^k}. \tag{1.4.10}$$

令

$$\Gamma^a_{bk} = \frac{\partial e^i_{(b)}}{\partial x^k}e^{(a)}_i + \mathring{\Gamma}^i_{jk}e^j_{(b)}e^{(a)}_i, \tag{1.4.11}$$

则由计算可知，当作标架变换(1.4.9)时，有

$$\tilde{\Gamma}^a_{bk} = \Gamma^c_{dl}A^a_cA^{-1d}_b\frac{\partial x^l}{\partial\tilde{x}^k} - A^{-1c}_b\frac{\partial A^a_c}{\partial\tilde{x}^k}, \tag{1.4.12}$$

即Γ^a_{bk}是一线性联络，它是由 $\mathring{\Gamma}^i_{jk}$ 诱导出来的. 由此可知，可以象(1.2.16)一样来定义权 σ 的张量的协变微分.

由(1.4.9)可知，标架 $e^i_{(a)}$ 对指标 i 是自然标架的逆变向量，对指标 a 是群 $GL(m, R)$ 的协变向量，因此其协变微分为

$$e^i_{(b);k} = \frac{\partial e^i_{(b)}}{\partial x^k} + e^j_{(b)}\mathring{\Gamma}^i_{jk} - e^i_{(a)}\Gamma^a_{bk} = 0, \tag{1.4.13}$$

其中利用了(1.4.11).

对于自然标架的可微分向量 ξ^i 的对于联络 $\mathring{\Gamma}^i_{jk}$ 的协变微分 $\mathring{\xi}^i{}_{;k}$ 是一张量，它对应有一对于标架 $\{e^i_{(a)}\}$ 的张量:

$$\begin{aligned}\xi^a{}_{;c} = \mathring{\xi}^i{}_{;k}e^{(a)}_ie^k_{(c)} = (\mathring{\xi}^ie^{(a)}_i)_{;k}e^k_{(c)} = \xi^a{}_{;j}e^j_{(c)} \\ = X_c\xi^a + \xi^b\gamma^a_{bc},\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

其中

$$X_c = e^i_{(c)} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.4.15}$$

是一微分算子，而

$$\gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{bk} e^k_{(c)} = e^{(a)}_k X_c e^k_{(b)} + \mathring{\Gamma}^i_{jk} e^{(a)}_i e^j_{(b)} e^k_{(c)}. \tag{1.4.16}$$

我们称 $\xi^a{}_{;c}$ 为 ξ^a 沿标架向量 $e^i_{(c)}$ 的协变微分. 同样可以定义权 σ 的张量沿标架向量 $e^i_{(c)}$ 的协变微分为

$$T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s;c} = X_c T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} + \sum_{l=1}^{r} T^{a_1\cdots a_{l-1} b a_{l+1}\cdots a_r}_{b_1\cdots\cdots\cdots\cdots b_s} \gamma^{a_l}_{bc}$$

$$- \sum_{l=1}^{s} T^{a_1\cdots\cdots\cdots\cdots a_r}_{b_1\cdots b_{l-1} a b_{l+1}\cdots b_s} \gamma^a_{b_l c} + \sigma T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} \gamma^a_{ac}. \tag{1.4.17}$$

现设 V 中存在二阶协变、对称、非异、可微分张量场 $g_{ik}(x)$. 众所周知，存在可微分的向量场 $e^i_{(a)}(x)$ 使得当 V 为 R^m 一点 x_0 的充分小邻域时有

$$e^i_{(a)} g_{ik} e^k_{(b)} = \eta_{ab}, \tag{1.4.18}$$

其中

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & -I^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{1.4.19}$$

$I^{(r)}$ 为 $r \times r$ 单位方阵. $r - s$ 称为 g_{ik} 的号差(signature). 满足(1.4.18)的标架$\{e^i_{(a)}\}$称为伪正交标架. 又由(1.4.19)可知此方阵的逆方阵元素 $\eta^{ab} = \eta_{ab}$. 如果号差为 m，则称为正交标架. 此时，$\eta_{ab} = \delta_{ab}, \delta_{ab} = 1$（当 $a = b$），否则为零. (1.4.18)亦可写成

$$g_{ik} = \eta_{ab} e^{(a)}_i e^{(b)}_k. \tag{1.4.20}$$

经标架变换(1.4.9)后，如果 $\tilde{e}^i_{(a)}(\tilde{x})$ 仍然为伪正交标架，则由

$$\eta_{ab} e^{(a)}_k e^{(b)}_l \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{g}_{ij}$$

$$= \eta_{ab}\tilde{e}_i^{(a)}\tilde{e}_j^{(b)} = \eta_{cd}A_a^c A_b^d e_k^{(a)} e_l^{(b)} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}, \quad (1.4.21)$$

可知 $A_b^a(x)$ 必须满足

$$\eta_{cd}A_a^c A_b^d = \eta_{ab}. \quad (1.4.22)$$

满足上面条件的 $m \times m$ 方阵 $A = (A_b^a)$ 所成的群，命名为 $O(r,s), r+s=m$. 当 $s=0$，令 $O(m)=O(m,0)$是正交矩阵群. 由于对于伪正交标架 $\{e_{(a)}^i\}$ 的向量 ξ^a，经标架变换(1.4.1)有

$$\tilde{\xi}^a = A_b^a \xi^b,$$

其中 A_b^a 满足 (1.4.22)，故 $O(m,n)$ 型联络 Γ_{bj}^a 满足

$$\tilde{\Gamma}_{bj}^a = \Gamma_{dk}^c A_c^a A_b^{-1d}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} - A_b^{-1c}\frac{\partial A_c^a}{\partial \tilde{x}^j}.$$

由(1.4.22)可知

$$\eta_{ac}\frac{\partial A_d^c}{\partial \tilde{x}^i}A_b^{-1d} + A_a^{-1c}\frac{\partial A_c^d}{\partial \tilde{x}^i}\eta_{da} = 0,$$

而根据 § 1.2 联络的定义可知 Γ_{bj}^a 必须适合条件

$$\eta_{ac}\Gamma_{bj}^c + \Gamma_{aj}^c\eta_{cb} = 0, \quad (1.4.23)$$

用 $e_{(d)}^j$ 乘上式便可得出

$$\eta_{ac}\gamma_{bd}^c + \gamma_{ad}^c\eta_{cb} = 0. \quad (1.4.24)$$

这里应着重指出的是，由于(1.4.13)，如果一个张量的方程对于自然标架是成立的，那么对于任意的标架也成立. 例如，对于黎曼联络的 Bianchi 恒等式(1.3.18)对于一般的标架仍然有

$$R_{bcd;e}^a + R_{bde;c}^a + R_{bec;d}^a = 0,$$

其中

$$R_{bcd}^a = \mathring{R}_{jkl}^i e_i^{(a)} e_{(b)}^j e_{(c)}^k e_{(d)}^l,$$

$\mathring{R}_{jkl}^i$ 是对自然标架的黎曼曲率张量. 又例如，对伪正交标架而言，Einstein 方程(1.3.19)为

$$\mathring{R}_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}R+\Lambda\eta_{ab}=\mathring{T}_{ab},$$

但值得注意的是，黎曼曲率张量对于 γ^a_{bc} 不再是(1.3.1)的形式，因为 γ^a_{bc} 不是原来§ 1.2 意义下的联络，而 Γ^a_{bk} 才是. 现在

$$\Gamma^a_{bk}=\frac{\partial e^i_{(b)}}{\partial x^k}e^{(a)}_i+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}e^j_{(b)}e^{(a)}_i. \tag{1.4.25}$$

对于此联络，曲率张量

$$\begin{aligned} R^a_{bkl}&=\mathring{R}^i_{jkl}e^{(a)}_i e^j_{(b)} \\ &=\frac{\partial\Gamma^a_{bl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^a_{bk}}{\partial x^l}+\Gamma^j_{bl}\Gamma^a_{jk}-\Gamma^j_{bk}\Gamma^a_{jl}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R^a_{bcd}=&\,e^k_{(c)}\frac{\partial(\Gamma^a_{bl}e^l_{(d)})}{\partial x^k}-e^l_{(d)}\frac{\partial(\Gamma^a_{bk}e^k_{(c)})}{\partial x^l} \\ &+\gamma^j_{bd}\gamma^a_{jc}-\gamma^j_{bc}\gamma^a_{jd}-\Gamma^a_{bl}e^k_{(c)}\frac{\partial e^l_{(d)}}{\partial x^k}+\Gamma^a_{bk}e^l_{(d)}\frac{\partial e^k_{(c)}}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

此即

$$R^a_{bcd}=X_c\gamma^a_{bd}-X_d\gamma^a_{bc}+\gamma^j_{bd}\gamma^a_{jc}-\gamma^j_{bc}\gamma^a_{jd}-\gamma^a_{bj}C^j_{cd}, \tag{1.4.26}$$

其中

$$C^j_{cd}=\left(e^k_{(c)}\frac{\partial e^l_{(d)}}{\partial x^k}-e^k_{(d)}\frac{\partial e^l_{(c)}}{\partial x^k}\right)e^{(j)}_l. \tag{1.4.27}$$

由于一般的标架包含了自然标架，今后我们在讨论张量时，是指一般的标架，不再特别对自然标架给以特殊的符号或指标，例如说曲率张量 R^i_{jkl} 则是指一般标架的曲率张量而言.

§ 1.5 外微分运算

在上节中，我们使用标架来研究微分几何，其原因是因为

与局部坐标的选取无关，但与标架的选取却仍然有关. 现代微分几何学的符号与古典微分几何学符号的区别在于对前者的符号选取中，不但希望与坐标的选取无关，并且与标架的选取也无关，这样便于对大范围微分几何的研究. 所以在本节中，我们讨论外微分运算之前，首先介绍现代微分几何学常用的符号，但实际上本节仍限于讨论局部的运算.

设M是一个集合，它的点与R^m的开集V的点是一一地对应的. M中的集合如对应于V中的开集称为开的. 如$p\in M$，对应$x(p)=(x^1(p),\cdots,x^m(p))\in V$，则$x^i(p)$称为$p$点的坐标. 由于$x:M\to V$是一一对应的，其逆映照以$x^{-1}:V\to M$表示. 我们说函数$h(p)$在$M$上连续，即$h\circ x^{-1}$在$V$连续，$h(p)$在$M$上可微分，即$h\circ x^{-1}$在$V$上可微分等.

令$\mathscr{F}_p$表示所有在M的p点可微分函数，即$f\in\mathscr{F}_p$，必有p点的一邻域使得f在此邻域内可微分. 映照$X:\mathscr{F}_p\to R$称为p点的向量，如果适合下面两个条件:

(i) $X(gf)=fXg+gXf,\ f,g\in\mathscr{F}_p$;

(ii) $X(\lambda f+\mu g)=\lambda Xf+\mu Xg,\ \lambda,\mu\in R$.

若$\lambda,\mu\in R$，定义$\lambda X+\mu Y$向量为$(\lambda X+\mu Y)f=\lambda Xf+\mu Yf, f\in\mathscr{F}_p$则所有$p$点的向量成一线性空间$M_p$. M_p称为p点的切空间.

取$g=1$，由(i)可知$Xf=fX1+Xf$，故有

$$X1=0.$$

设$f\in\mathscr{F}_p$，q是p邻域的点，它们的坐标分别为$x(p)=x$与$x(q)=y$. 令$f^*=f\circ x^{-1}$. 由于

$$f^*(y)=f^*(x)+\int_0^1\frac{d}{dt}f^*(x+t(y-x))dt$$

$$=f^*(x)+(y^i-x^i)\int_0^1\frac{\partial f^*(u)}{\partial u^i}\bigg|_{u=x+t(y-x)}dt,$$

此即有

$$f(q) = f(p) + (y^i(q) - x^i(p))g_i(q). \qquad (1.5.1)$$

由于 $x(p)$ 是固定的

$$Xf(p) = f(p)X1 = 0,$$

因此有

$$(Xf)(p) = \frac{\partial f^*(x)}{\partial x^i}(Xx^i)(p).$$

令 $Xx^i = \xi^i(x)$，得出

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

此式表示 $X \in M_p$ 对应有一 $x \in V$ 的在 § 1.1 意义下的向量 $\xi^i(x)$. M_p 与 § 1.1 中线性空间T_x是同构的. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 M_p 的一组基，称为自然基.

如 $e^i_{(a)}$ 是V中一组标架，令

$$X_a = e^i_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad (1.5.2)$$

则 $X_1, \cdots, X_m$ 是 M_p 的一组基，向量X可写成

$$X = \xi^a X_a, \qquad \xi^a = \xi^i e^{(a)}_i,$$

其中 ξ^a 是对于标架 $e^i_{(a)}$ 的 § 1.4 定义下的向量，因此现在定义的向量与坐标及标架的选取无关.

X 称为M上的可微分向量场，如果 $\xi^i(x) = Xx^i$ 是在V可微分的，根据定义，X_a 是可微分的向量场.

若 X, Y 为可微分向量场，很容易证明$[X, Y] = XY - YX$ 是一可微分向量场.

令 M_p^* 表示 M_p 的对偶空间. M_p^* 的向量 $\omega: M_p \to R$ 称为一次微分式或简称一次式. 令张量积

$$\mathscr{D}^r_s(p)=\underbrace{M_p\otimes\cdots\otimes M_p}_{r\text{ 次}}\otimes\underbrace{M_p^*\otimes\cdots\otimes M_p^*}_{s\text{ 次}},$$

$\mathscr{D}^r_s(p)$ 的元素 T 称为 r 阶逆变，s 阶协变张量。如果 $\{X_a\}$ 是 M_p 的一组基，$\omega^a\in M_p^*(a=1,\cdots,m)$ 称为 X_a 的对偶基，若适合

$$\omega^a(X_b)=\delta^a_b. \tag{1.5.3}$$

因此张量 T 能写为

$$T=T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}X_{a_1}\otimes\cdots\otimes X_{a_r}\otimes\omega^{b_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{b_s},$$

其系数 $T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$ 是 § 1.4 意义下的张量。对每一 $T\in\mathscr{D}^r_s(p)$ 定义拓扑积 $\underbrace{M_p^*\times\cdots\times M_p^*}_{r\text{ 次}}\times\underbrace{M_p\times\cdots\times M_p}_{s\text{ 次}}$ 的一多元线性函数如下：设

$$\theta_1,\cdots,\theta_r\in M_p^*,\quad Y_1,\cdots,Y_s\in M_p,$$

则

$$T(\theta_1,\cdots,\theta_r,Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$=T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\theta_1(X_{a_1})\cdots\theta_r(X_{a_r})\omega^{b_1}(Y_1)\cdots\omega^{b_s}(Y_s). \tag{1.5.4}$$

设 ω 是 $\mathscr{D}_r(p)$ 的张量，$X_1,\cdots,X_r\in M_p$。如张量 ω 有如下的性质：

$$\omega(X_{k_1},\cdots,X_{k_r})$$
$$=\begin{cases}\omega(X_1,\cdots,X_r)，当(k_1,\cdots,k_r)是(1,\cdots,r)的偶排列，\\-\omega(X_1,\cdots,X_r)，当(k_1,\cdots,k_r)是(1,\cdots,r)的奇排列，\end{cases} \tag{1.5.5}$$

则 ω 称为 p 点的 r 次外微分或简称 r 次式。令

$$\frac{1}{r!}a_{k_1\cdots k_r}(x(p))=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\right), \tag{1.5.6}$$

则 $a_{k_1\cdots k_r}$ 是 § 1.4 意义下的 r 阶协变张量，对指标 $k_1,\cdots,k_r$ 是反对称的。所有在 p 点的 r 次外微分式所组成的线性空间命

之为 $\mathfrak{A}_r(p)$. $\mathfrak{A}_1(p)=M_p^*$. 如ω对每一点 $p\in M$ 皆是 r 次式，且(1.5.6)在V中是可微分的，则称ω是在V上可微分的 r 次式. 所有在M中可微分的 r 次式组成的空间命之为 $\mathfrak{A}_r(M)$. $\mathfrak{A}_0(M)$是M中可微分函数.

如 $\omega\in\mathfrak{A}_r,\theta\in\mathfrak{A}_s$ 可定义外积 $\omega\wedge\theta\in\mathfrak{A}_{r+s}$ 如下：

当$X_1,\cdots,X_{r+s}\in M_p$，则

$$\omega\wedge\theta(X_{l_1},\cdots,X_{l_{r+s}})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!}\delta^{j_1\cdots j_r k_1\cdots k_s}_{l_1\cdots l_{r+s}}\omega(X_{j_1}\cdots X_{j_r})\theta(X_{k_1}\cdots X_{k_s}),\tag{1.5.7}$$

其中 $l_1\cdots l_{r+s}$ 是 $1,\cdots,r+s$ 的一个排列. 由定义可知

$$\omega\wedge\theta=(-1)^{rs}\theta\wedge\omega.\tag{1.5.8}$$

现在定义 $\omega\in\mathfrak{A}_r(M)$ 的外微分 $d\omega\in\mathfrak{A}_{r+1}(M)$ 如下：当 $r=0,f\in\mathfrak{A}_0(M)$，则 $df\in\mathfrak{A}_1(M)$ 定义为，对任一点 $p\in M$ 来说，有

$$df(X)=Xf,\quad X\in M_p.$$

由于 $x^i(p)\in\mathfrak{A}_0(M)$，故有

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j,\tag{1.5.9}$$

因此 $df=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$，而对任一 $\omega\in\mathfrak{A}_r(M)$，令 $a_{k_1\cdots k_r}$ 是由(1.5.6)定义，则外微分式 $\dfrac{1}{r!}a_{k_1\cdots k_r}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r}$ 有如下性质：

$$\frac{1}{r!}a_{k_1\cdots k_r}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_r}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)$$

$$=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right),$$

我们得出

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{k_1\cdots k_r}(x) dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_r}, \tag{1.5.10}$$

这是外微分式的局部坐标表示。我们可定义

$$d\omega = \frac{1}{r!} d a_{k_1\cdots k_r} \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_r}$$

$$= \frac{1}{r!(r+1)!} \delta^{k k_1 \cdots k_r}_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}} \frac{\partial a_{k_1\cdots k_r}}{\partial x^k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r+1}}$$

$$= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_{k_1\cdots \hat{k}_j \cdots k_{r+1}}}{\partial x^{k_j}} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{r+1}}. \tag{1.5.11}$$

由上式可知

$$dd\omega = 0, \tag{1.5.12}$$

因 $ddf = 0$. 又

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta. \tag{1.5.13}$$

现在要证明：设 $\omega \in \mathfrak{A}_r(M)$. $X_1, \cdots, X_{r+1}$ 是可微分向量场，则有

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{r+1}) = \frac{1}{r+1}\Big\{\sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} X_j \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{r+1}) + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant r+1} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_1, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, \hat{X}_k, \cdots, X_{r+1}), \tag{1.5.14}$$

其中 $\hat{X}_j$ 表 X_j 不出现。

设

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \cdots, r+1,$$

据(1.5.10)有

$$d\omega(X_1,\cdots,X_{r+1})=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}$$

$$\times\frac{\partial a_{k_1\cdots k_\alpha\cdots k_{r+1}}}{\partial x^{k_\alpha}}\xi_1^{k_1}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}$$

$$=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}\xi_\alpha^{k_\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{k_\alpha}}$$

$$\times\left(a_{k_1\cdots\hat{k}_\alpha\cdots k_{r+1}}\xi_1^{k_1}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}\right)$$

$$-\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}\xi_\alpha^{k_\alpha}a_{k_1\cdots\hat{k}_\alpha\cdots k_{r+1}}\frac{\partial}{\partial x^{k_\alpha}}$$

$$\times\left(\xi_1^{k_1}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{r+1}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}\xi_\alpha^{k_\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{k_\alpha}}$$

$$\times\,\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1})$$

$$-\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}\xi_\alpha^{k_\alpha}a_{k_1\cdots\hat{k}_\alpha\cdots k_{r+1}}$$

$$\times\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\xi_1^{k_1}\cdots\frac{\partial\xi_\beta^{k_\beta}}{\partial x^{k_\alpha}}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}$$

$$-\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}\xi_\alpha^{k_\alpha}a_{k_1\cdots\hat{k}_\alpha\cdots k_{r+1}}$$

$$\times\sum_{\beta=\alpha+1}^{r+1}\xi_1^{k_1}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\frac{\partial\xi_\beta^{k_\beta}}{\partial x^{k_\alpha}}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}$$

$$=\frac{1}{r+1}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}X_\alpha\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1})$$

$$
-\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\beta<\alpha}(-1)^{\alpha+\beta}a_{k_\beta k_1\cdots\hat{k}_\beta\cdots\hat{k}_\alpha\cdots k_{r+1}}\xi_\alpha^{k_\alpha}
$$

$$
\times\frac{\partial\xi_\beta^{k_\beta}}{\partial x^{k_\alpha}}\xi_1^{k_1}\cdots\hat{\xi}_\beta^{k_\beta}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}
$$

$$
-\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\alpha+\beta-1}a_{k_\beta k_1\cdots\hat{k}_\alpha\cdots\hat{k}_\beta\cdots k_{r+1}}
$$

$$
\times\xi_\alpha^{k_\alpha}\frac{\partial\xi_\beta^{k_\beta}}{\partial x^{k_\alpha}}\xi_1^{k_1}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\hat{\xi}_\beta^{k_\beta}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}
$$

$$
=\frac{1}{r+1}\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}X_\alpha\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots X_{r+1})
$$

$$
+\frac{1}{(r+1)!}\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\alpha+\beta}a_{jk_1\cdots\hat{k}_\alpha\cdots\hat{k}_\beta\cdots k_{r+1}}\Big(\xi_\alpha^k\frac{\partial\xi_\beta^j}{\partial x^k}
$$

$$
-\xi_\beta^k\frac{\partial\xi_\alpha^j}{\partial x^k}\Big)\xi_1^{k_1}\cdots\hat{\xi}_\alpha^{k_\alpha}\cdots\hat{\xi}_\beta^{k_\beta}\cdots\xi_{r+1}^{k_{r+1}}
$$

$$
=\frac{1}{r+1}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha-1}X_\alpha\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots X_{r+1})
$$

$$
+\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\alpha+\beta}\omega([X_\alpha,X_\beta],X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,
$$

$$
\hat{X}_\beta,\cdots,X_{r+1})\Big\},
$$

这便证明了(1.5.14).

定理 1.5.1 (Poincaré 引理) 设 ω 是在M的 p 点的邻域的可微分的 r 次式适合 $d\omega=0$,则存在 p 点的邻域的可微分的 $r-1$ 次式 θ 使得

$$
\omega=d\theta.
$$

证 由于此定理是局部的，我们不妨在 R^m 的原点的邻域来证明. 当 $r=m$，定理是显然的，只证 $r<m$ 的情形. 我们采用归纳法,设定理在 R^{m-1} 中成立,现证 R^m 的情形. 写

$$\omega = \omega_1 + dx^m \wedge \omega_2,$$

其中 ω_1, ω_2 不包含 dx^m. 构造 $r-1$ 次式

$$\theta = \theta_1 + dx^m \wedge \theta_2,$$

其次 θ_1, θ_2 不包含 dx^m. 取 θ_2 是任意的，而 θ_1 适合

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x^m} = \omega_2 + \sum_{\alpha=1}^{m-1} dx^\alpha \wedge \frac{\partial \theta_2}{\partial x^\alpha}, \tag{1.5.15}$$

其中若

$$\theta_1 = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}=1}^{m-1} X_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}(x) dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r-1}},$$

则 $\dfrac{\partial \theta_1}{\partial x^m}$ 定义为

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x^m} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}=}^{m-1} \frac{\partial X_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}}{\partial x^m} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{m-1}}.$$

令

$$\omega_2 + \sum_{\alpha=1}^{m-1} dx^\alpha \wedge \frac{\partial \theta_2}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}=1}^{m-1}$$
$$\times\, b_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}(x) dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r-1}},$$

则 (1.5.15) 化为求解偏微分方程组

$$\frac{\partial X_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}(x)}{\partial x^m} = b_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}(x),$$

这必有解. 例如

$$X_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}(x) = \int_0^{x^m} b_{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}}(x) dx^m$$

便是，换言之必存在 θ_1 适合 (1.5.15).

令

$$\varphi = \omega - d\theta = \omega_1 + dx^m \wedge \omega_2 - dx^m \wedge \frac{\partial \theta_1}{\partial x^m}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m-1} dx^\alpha \wedge \frac{\partial \theta_1}{\partial x^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{m-1} dx^m \wedge dx^\alpha \wedge \frac{\partial \theta_2}{\partial x^\alpha}$$

$$= \omega_1 - \sum_{\alpha=1}^{m-1} dx^\alpha \wedge \frac{\partial \theta_1}{\partial x^\alpha},$$

由此可见，φ 不包含 dx^m，并且 $d\varphi = d\omega = 0$. 但由

$$0 = d\varphi = dx^m \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} + \sum_{\alpha=1}^{m-1} dx^\alpha \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha},$$

便可知 $\frac{\partial \varphi}{\partial x^m} = 0$，即 φ 不包含 x^m，φ 是 R^{m-1} 的 r 次式，据归纳法假定，存在 $r-1$ 次式 ψ 使 $\varphi = d\psi$，由此得出 $\omega = \varphi + d\theta = d(\psi + \theta)$. 定理得证[1].

现设 $\omega^a = e_j^{(a)} dx^j$ 是 M 的一组基，Γ^a_{bj} 是 M 上的一线性联络，令

$$\omega^a_b = \Gamma^a_{bj} dx^j = \gamma^a_{bc} \omega^c, \qquad (1.5.16)$$

由于

$$d\omega^a = \frac{\partial e_j^{(a)}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = e^i_{(c)} X_b e_j^{(a)} \omega^b \wedge \omega^c$$

$$= -e_j^{(a)} X_b e^j_{(c)} \omega^b \wedge \omega^c,$$

有

$$d\omega^a + \omega^a_c \wedge \omega^c = \frac{1}{2}(\gamma^a_{cb} - \gamma^a_{bc} - C^a_{bc})\omega^b \wedge \omega^c,$$

其中 C^a_{bc} 的定义见(1.4.27). 又由

$$d\omega^a_b = d\gamma^a_{bd}\omega^d + \gamma^a_{bd} d\omega^d = X_c \gamma^a_{bd} \omega^c \wedge \omega^d$$
$$- \gamma^a_{bd} e_j^{(d)} X_e e^j_{(f)} \omega^e \wedge \omega^f,$$

---

1) 注意 Poincaré 引理的成立只要 ω 是 C^1 便可以了. 此外，如 ω 是实解析的，则解 θ 也是实解析的.

有

$$d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2}(X_c \gamma^a_{bd} - X_d \gamma^a_{bc} + \gamma^a_{ec}\gamma^e_{bd}$$

$$- \gamma^a_{ed}\gamma^e_{bc} - \gamma^a_{bf}C^f_{cd})\omega^c \wedge \omega^d.$$

据(1.2.20)与(1.4.16)可知

$$T^a_{bc} = \gamma^a_{cb} - \gamma^a_{bc} - C^a_{bc} \qquad (1.5.17)$$

是对标架 $e^i_{(a)}$ 的挠量张量. 由(1.4.26)我们得出 E. Cartan 的结构方程

$$d\omega^a + \omega^a_b \wedge \omega^b = \frac{1}{2} T^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c, \qquad (1.5.18)$$

$$d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d. \qquad (1.5.19)$$

§1.6 算子 δ 与 Δ

在定义算子 δ 与 Δ 之前，我们先把线性联络现代常用的符号介绍一下.

给与§ 1.4 意义下的线性联络 Γ^a_{bj}，令 $\gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{bj}e^j_{(c)}$，我们可定义映照 ∇_X: $\mathscr{D}^1(M) \to \mathscr{D}^1(M)$ 如下:

若 $X = \xi^a X_a, Y = \eta^a X_a \in \mathscr{D}^1(M)$，则

$$\nabla_X Y = \xi^b(X_b\eta^a + \eta^c\gamma^a_{cb})X_a. \qquad (1.6.1)$$

由此可知，∇ 有如下的性质: 若 $f, g \in \mathscr{D}^0(M), X, Y \in \mathscr{D}^1(M)$，则

(i) $\nabla_{fY+gZ}X = f\nabla_Y X + g\nabla_Z X$,

(ii) $\nabla_X(fY + gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + XfY + XgZ.$

反之，若给与 $\nabla_X: \mathscr{D}^1(M) \to \mathscr{D}^1(M)$ 适合(i),(ii)，则不难证明是定义了一线性联络，因为可以令

$$\nabla_{X_a}X_b = \gamma^c_{ba}X_c. \qquad (1.6.2)$$

我们可以从 $\Gamma^{a}_{bj}=\gamma^{i}_{bc}e^{(\varphi)}_{j}$ 来证明它符合线性联络的定义。

从线性联络 ∇，可以定义任意张量场 T 的沿方向 X 的协变微分如下：

$$\nabla_X f = Xf,\quad f\in\mathscr{D}^0(M). \tag{1.6.3}$$

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y),$$
$$\omega\in\mathscr{D}_1(M),Y\in\mathscr{D}^1(M). \tag{1.6.4}$$

$$\nabla_X(S\otimes T) = \nabla_X S\otimes T + S\otimes\nabla_X T, \tag{1.6.5}$$

S,T 是任两向量场．容易证明：如 $X=\xi^a X_a, T=T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}X_{a_1}\otimes\cdots\otimes X_{a_r}\otimes\omega^{b}\otimes\cdots\otimes\omega^{b_s}$，则据（1.4.17）及上面的定义可知

$$\nabla_X T = \xi^a T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s;a}X_{a_1}\otimes\cdots\otimes X_{a_r}\otimes\omega^{b_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{b_s}. \tag{1.6.6}$$

令

$$\begin{cases} T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \\ R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}, \end{cases} \tag{1.6.7}$$

其中 $X,Y\in\mathscr{D}^1(M)$．显而易见，任与 $f,g,h\in\mathscr{D}^0(M)$ 有

$$T(fX,gY) = fgT(X,Y),$$
$$R(fX,gY)(hZ) = fghR(X,Y)Z,$$

其中 $Z\in\mathscr{D}^1(M)$．取一组标架 $\{X_a\}$，据（1.6.2）可知

$$T(X_a,X_b) = T^c_{ab}X_c,\quad R(X_a,X_b)X_c = R^d_{cab}X_d,$$

其中 T^c_{ab} 与 R^d_{cab} 分别是由（1.5.17）与（1.4.26）所定义的挠率与曲率张量．

现设 M 中给与二阶协变可微分张量场 $G=g_{jk}dx^j\otimes dx^k$，设它是对称的，即 $G(X,Y)=G(Y,X)$ 任与 $X,Y\in\mathscr{D}^1(M)$，并且是 $\det(g_{jk})\neq 0$．

定义

$$\langle X,Y\rangle = G(X,Y). \tag{1.6.8}$$

我们要证明

定理 1.6.1 存在唯一的线性联络 ∇ 适合

(i) 挠率为 0;

(ii) $\nabla_X G = 0$,对任一 $X \in \mathfrak{D}^1(M)$.

证 由 g_{jk} 定义的 Christoffel 符号$\left\{ {i \atop kl} \right\}$可定义线性联络

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \left\{ {l \atop kj} \right\} \frac{\partial}{\partial x^l},$$

则∇显然满足条件 (i). 而由 (1.2.30) 可知 (ii) 亦满足.

反之,令

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^l_{kj} \frac{\partial}{\partial x^l},$$

则由 (i) 知挠率张量 $T^i_{kl} = 0$, 即 $\Gamma^l_{kj} = \Gamma^l_{jk}$; 由 (ii) 可知

$$0 = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} G)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} G\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$- G\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) - G\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^l}\right),$$

此即

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = g_{lr}\Gamma^r_{jk} + g_{kr}\Gamma^r_{jl},$$

故有

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} = 2g_{lr}\Gamma^r_{jk},$$

这证明 Γ^r_{jk} 即是 Christoffel 符号,证毕.

适合定理 1.6.1 的线性联络称为黎曼联络, 它唯一地由 g_{jk} 所决定,本节仅用黎曼联络定义协变微分.

设 ω 是M中 r 次外微分式

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

由于$\left\{\begin{matrix} i \\ kl \end{matrix}\right\}$对指标 k, l 对称，故(1.5.11)可写为

$$d\omega = \frac{1}{r!(r+1)!}\delta^{l l_1\cdots l_r}_{j_1\cdots j_{r+1}} a_{l_1\cdots l_r;l} dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_{r+1}}. \quad (1.6.9)$$

我们定义 ω 的对偶 $*\omega$ 为 $m-r$ 次式如下：

$$*\omega = \frac{1}{r!(m-r)!}\varepsilon_{i_1\cdots i_r k_1\cdots k_{m-r}} a^{i_1\cdots i_r} dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_{m-r}}, \quad (1.6.10)$$

其中

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_m} = \sqrt{|g|}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}, \quad g = \det(g_{ik}), \quad (1.6.11)$$

这里应用(1.1.9)的符号，而

$$a^{i_1\cdots i_r} = g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}a_{k_1\cdots k_r}.$$

我们首先证明

$$**\omega = (-1)^{mr+r}\mathrm{sgn}(g)\omega, \quad (1.6.12)$$

其中 $\mathrm{sgn}(t)$ 表实数 t 的符号. 实际上，由(1.6.10)可知

$$**\omega = \frac{1}{(r!)^2(m-r)!}\varepsilon_{l_1\cdots l_{m-r}h_1\cdots h_r}\varepsilon^{l_1\cdots l_{m-r}}_{i_1\cdots i_r} a^{i_1\cdots i_r} \times dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_r}$$

$$= \frac{|g|}{(r!)^2(m-r)!}\delta^{1\cdots\cdots m}_{l_1\cdots l_{m-r}h_1\cdots h_r} g^{l_1k_1}\cdots g^{l_{m-r}k_{m-r}}\varepsilon_{i_1\cdots i_r k_1\cdots k_{m-r}} \times g^{i_1s_1}\cdots g^{i_rs_r}a_{s_1\cdots s_r}dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_r}$$

$$= \frac{|g|/g}{(r!)^2(m-r)!}\delta^{1\cdots\cdots\cdots\cdots m}_{l_1\cdots l_{m-r}h_1\cdots h_r}\delta^{s_1\cdots s_r l_1\cdots l_{m-r}}_{1\cdots\cdots\cdots\cdots m} a_{s_1\cdots s_r}dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_r}$$

$$= \frac{(-1)^{(m-r)r}\mathrm{sgn}(g)}{(r!)^2}\delta^{s_1\cdots s_r}_{h_1\cdots h_r} a_{s_1\cdots s_r}dx^{h_1}\wedge\cdots\wedge dx^{h_r}$$

$$= (-1)^{mr+r}\mathrm{sgn}(g)\omega.$$

其次，如有另一 r 次式

$$\theta = \frac{1}{r!} b_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \tag{1.6.13}$$

则

$$\theta \wedge * \omega = \frac{1}{r!} b_{i_1\cdots i_r} a^{i_1\cdots i_r} * 1, \tag{1.6.14}$$

其中

$$* 1 = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m. \tag{1.6.15}$$

实际上

$$\theta \wedge * \omega = \frac{1}{(r!)^2 (m-r)!} b_{i_1\cdots i_r} \varepsilon_{k_1\cdots k_r l_1 \cdots l_{m-r}} a^{k_1\cdots k_r}$$

$$\times dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_{m-r}}$$

$$= \frac{\sqrt{|g|}}{(r!)^2 (m-r)!} b_{i_1\cdots i_r} a^{k_1\cdots k_r} \delta^{i_1\cdots i_r l_1 \cdots l_{m-r}}_{k_1\cdots k_r l_1 \cdots l_{m-r}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

$$= \frac{1}{r!} \sqrt{|g|} b_{i_1\cdots i_r} a^{i_1\cdots i_r} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

$$= \frac{1}{r!} b_{i_1\cdots i_r} a^{i_1\cdots i_r} * 1.$$

再者，若 ω 为 r 次式，令

$$\delta \omega = (-1)^{mr+m+1} * d * \omega, \tag{1.6.16}$$

这是 $r-1$ 次．我们要证

$$\delta \omega = - \frac{\operatorname{sgn}(g)}{r!(r-1)!} \delta^{j_1\cdots j_r}_{k k_1 \cdots k_{r-1}} g^{kj} a_{j_1\cdots j_r ; j} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{r-1}}, \tag{1.6.17}$$

其中 $\operatorname{sgn}(g) = \det(g_{ij})$ 的符号．实则

$$* d * \omega = \frac{\sqrt{|g|}}{(r-1)!} \delta^{1\cdots\cdots m}_{s_1\cdots s_{m-r+1} l_1 \cdots l_{r-1}}$$

$$\times g^{s_1 p_1} \cdots g^{s_{m-r+1} p_{m-r+1}} \Big[\frac{1}{(m-r+1)!} \delta^{j j_1 \cdots j_{m-r}}_{p_1 \cdots p_{m-r+1}}$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!}\delta^{1\cdots\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}} g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r} a_{k_1\cdots k_r}\right)_{;j}\Big]$$

$$\times dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_{r-1}}$$

$$=\frac{|g|}{r!(r-1)!(m-r)!}\delta^{1\cdots\cdots m}_{s_1\cdots s_{m-r+1}l_1\cdots l_{r-1}} g^{s_1j}$$

$$\times\left(g^{s_2j_1}\cdots g^{s_{m-r+1}j_{n-r}}\delta^{1\cdots\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{m-r}} g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\right)$$

$$\times a_{k\cdots k_r;j}dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_{r-1}}$$

$$=\frac{|g|}{r!(r-1)!(m-r)!}\delta^{1\cdots\cdots m}_{s_1\cdots s_{m-r+1}l_1\cdots l_{r-1}} g^{s_1j}$$

$$\times\frac{1}{g}\delta^{k_1\cdots k_r s_2\cdots s_{m-r+1}}_{1\cdots\cdots m} a_{k_1\cdots k_r;j}dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_{r-1}}$$

$$=\frac{(-1)^{(r-1)(m-r)}\mathrm{sgn}(g)}{r!(r-1)!(m-r)!} g^{s_1j}\delta^{1\cdots\cdots m}_{s_1l_1\cdots l_{r-1}s_2\cdots s_{m-r+1}}\delta^{k_1\cdots k_r s_2\cdots s_{m-r+1}}_{1\cdots\cdots m}$$

$$\times a_{k_1\cdots k_r;j}dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_{r-1}}$$

$$=\frac{(-1)^{mr+m}}{r!(r-1)!}\mathrm{sgn}(g)\delta^{k_1\cdots k_r}_{s_1l_1\cdots l_{r-1}} g^{s_1j}a_{k_1\cdots k_r;j}$$

$$\times dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_{r-1}},$$

这证明了(1.6.17)。

最后，令

$$\Delta=d\delta+\delta d,\tag{1.6.18}$$

而要证明

$$\Delta\omega=-\mathrm{sgn}(g)\left\{\frac{1}{r!}g^{jk}a_{l_1\cdots l_r;jk}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(r!)^2}\delta^{ji_1\cdots i_r}_{ll_1\cdots l_r} g^{lk}\sum_{s=1}^{r}R^{i}_{i_sjk}a_{i_1\cdots i_{s-1}ii_{s+1}\cdots i_r}\right\}$$

$$\times dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_r}.\tag{1.6.19}$$

实则，由(1.6.9)与(1.6.17)可知

$$\delta d\omega = \frac{-\operatorname{sgn}(g)}{r!}\delta^{i_1\cdots i_{r+1}}_{ll_1\cdots l_r} g^{lk}\Big(\frac{1}{r!(r+1)!}\delta^{jj_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_{r+1}}$$

$$\times a_{j_1\cdots j_r;j}\Big)_{;k} dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_r}, \qquad (1.6.20)$$

及

$$d\delta\omega = \frac{-\operatorname{sgn}(g)}{r!}\delta^{ji_1\cdots i_{r-1}}_{l_1\cdots l_r}\Big(\frac{1}{r!(r-1)!}\delta^{j_1j_2\cdots j_r}_{li_1\cdots i_{r-1}}$$

$$\times g^{lk}a_{j_1\cdots j_r;k}\Big)_{;j}dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_r} = \frac{-\operatorname{sgn}(g)}{(r!)^2(r-1)!}$$

$$\times \delta^{ji_1\cdots i_{r-1}}_{l_1l_2\cdots l_r}\delta^{j_1j_2\cdots j_r}_{li_1\cdots i_{r-1}} g^{lk}a_{j_1\cdots j_r;kj}dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_r}. \qquad (1.6.21)$$

我们利用恒等式

$$\frac{1}{(r-1)!}\delta^{ji_1\cdots i_{r-1}}_{l_1l_2\cdots l_r}\delta^{j_1\cdots j_r}_{li_1\cdots i_{r-1}} = \delta^j_l\,\delta^{j_1\cdots j_r}_{l_1\cdots l_r} - \delta^{jj_1\cdots j_r}_{ll_1\cdots l_r}. \qquad (1.6.22)$$

上式左边当 $l_1\cdots l_r$ 固定时，若 $i_1,\cdots i_{r-1}$ 取 $l_1,\cdots,l_{s-1},l_{s+1},\cdots,l_r$ 之值，则 j 取 l_s 时 $\delta^{ji_1\cdots i_{r-1}}_{l_1l_2\cdots l_r}$ 之值为$(-1)^{s-1}$，而若 j 不取 l_s 之值，则$\delta^{ji_1\cdots i_{r-1}}_{l_1l_2\cdots l_r}$为 0。

$$\frac{1}{(r-1)!}\delta^{ji_1\cdots i_{r-1}}_{l_1l_2\cdots l_r}\delta^{j_1\cdots j_r}_{li_1\cdots i_{r-1}} = \sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\delta^j_{l_s}\delta^{j_1\cdots\cdots j_r}_{ll_1\cdots\hat{l}_s\cdots l_r}.$$

另一方面，$\delta^{jj_1\cdots j_r}_{ll_1\cdots l_r}$ 作为行列式，按第一行展开有

$$\delta^{jj_1\cdots j_r}_{ll_1\cdots l_r} = \delta^j_l\delta^{j_1\cdots j_r}_{l_1\cdots l_r} - \sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\delta^j_{l_s}\delta^{j_1\cdots\cdots j_r}_{ll_1\cdots\hat{l}_s\cdots l_r}.$$

由上两式可知(1.6.22)成立. 以(1.6.22)代入(1.6.21)，得出

$$d\delta\omega = \frac{-\operatorname{sgn}(g)}{(r!)^2}\,(\delta^{j_1\cdots j_r}_{l_1\cdots l_r}g^{jk}a_{j_1\cdots j_r;kj}$$

$$-\delta^{jj_1\cdots j_r}_{ll_1\cdots l_r}g^{lk}a_{j_1\cdots j_r;kj})dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_r}.$$

把上式与(1.6.20)相加便得

$$\Delta\omega = -\mathrm{sgn}(g)\Big\{\frac{1}{r!}g^{ik}a_{l_1\cdots l_r;ik}$$

$$+\frac{1}{(r!)^2}\delta^{jj_1\cdots j_r}_{ll_1\cdots l_r}g^{lk}(a_{j_1\cdots j_r;jk} - a_{j_1\cdots j_r;kj})\Big\}dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_r}.$$

利用 Ricci 恒等式(1.3.8)，有

$$a_{j_1\cdots j_r;jk} - a_{j_1\cdots j_r;kj} = \sum_{s=1}^{r} a_{j_1\cdots j_{s-1}ij_{s+1}\cdots j_r}R^i_{j_sjk},$$

然后代入上式便得出(1.6.19).

当 $r=0, \omega=f$ 是函数，由(1.3.19)可知

$$\Delta f = -\mathrm{sgn}(g)g^{ik}f_{;jk} = -\mathrm{sgn}(g)g^{ik}$$

$$\times\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k} - \left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right]. \qquad (1.6.23)$$

由于

$$g^{jk}\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}g^{jk}\frac{\partial g^{il}}{\partial x^j}g_{lk} - \frac{1}{2}g^{jk}\frac{\partial g^{il}}{\partial x^k}g_{jl}$$

$$-g^{il}\frac{\partial\log\sqrt{|g|}}{\partial x^l} = -\frac{\partial g^{il}}{\partial x^l} - \frac{1}{\sqrt{|g|}}g^{il}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^l}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{|g|}g^{il}),$$

故(1.6.23)亦可写为

$$\Delta f = -\mathrm{sgn}(g)\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,g^{il}\frac{\partial f}{\partial x^l}\right). \quad (1.6.24)$$

当 $r=1$，$\omega = a_i dx^i$，

$$\Delta\omega = -\mathrm{sgn}(g)\{g^{jk}a_{i;jk} - g^{jk}a_jR_{ki}\}dx^i. \qquad (1.6.25)$$

§1.7 局部映照

设 M_1 是一集合与 R^n 的开集 U 一一对应，映照 $\varphi: M \to M_1$ 称为可微分的（实解析的），如果 $q=\varphi(p)$ 的坐标 $y(q)=(y^1(q),\cdots,y^n(q))$ 是 p 的坐标 $x(q)=(x^1(q),\cdots,x^m(q))$ 的可微分（实解析）函数。

$p\in M$ 的向量 $X\in M_p$ 对应有向量 $\varphi_* X\in M_{1q}$, $q=\varphi(p)$, 如果 $X=\xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$\varphi_* X=\xi^i(x)\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{1.7.1}$$

注意，如果 X 是 M 的向量场，$\varphi_* X$ 未必是 M_1 的向量场. 另一方面，如 M_1 的 $q=\varphi(p)$ 有一 r 次式

$$\omega=\frac{1}{r!}\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_r=1}^{n}a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(y)dy^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dy^{\alpha_r},$$

则在 $p\in M$ 有一 r 次式

$$\varphi^*\omega=\frac{1}{r!}\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_r=1}^{n}a_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(y(\varphi(p)))\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}, \tag{1.7.2}$$

称为把 ω 拉回去 (pull back). 如果 ω 是 M_1 中的可微分 r 次式，则 $\varphi^*\omega$ 是 M 中的可微分 r 次式。

设 G 与 G_1 分别是 r 维与 r_1 维矩阵李群，$G\subset GL(N,K)$, $G_1\subset GL(N_1,K)$. 映照 $\varphi: G_1\to G$ 称为局部同态，如果 φ 是一群的同态，并且有 G 与 G_1 的单位的邻域 $\mathfrak{W}_\varepsilon$ 与 $\mathfrak{W}_{1\varepsilon}$ 使得当 φ 限制在 $\mathfrak{W}_{1\varepsilon}$ 时，$\varphi:\mathfrak{W}_{1\varepsilon}\to\mathfrak{W}_\varepsilon$ 是实解析的。

设 $A_1(\sigma_1)\in G_1$, $\sigma_1=(\sigma_1^1,\cdots,\sigma_1^{r_1})$ 是参数.

$$A(\sigma)=\varphi(A_1(\sigma_1))\in \mathfrak{W}_\varepsilon,$$

据定义，参数 $\sigma=(\sigma^1,\cdots,\sigma^{r_1})$ 是 $\sigma_1^{a_1}(a_1=1,\cdots,r_1)$ 的实解析函数， 由 φ 诱导出 G_1 的李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的映照 φ_* 如下：若 $\mathfrak{g}_1$ 的基

$$T_{1a_1}=\left[\frac{\partial A_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1^{a_1}}\right]_{\sigma_1=0},a_1=1,\cdots,r_1,$$

对应 $\mathfrak{g}$ 的向量

$$\varphi_*(T_{1a_1})=\left[\frac{\partial\sigma^a}{\partial\sigma_1^{a_1}}\frac{\partial A(\sigma)}{\partial\sigma^a}\right]_{\sigma_1=0}$$

$$=\left[\frac{\partial\sigma^a}{\partial\sigma_1^{a_1}}\right]_{\sigma_1=0}T_a. \tag{1.7.3}$$

此外，φ_* 是 R 线性的，且

$$\varphi_*([T_{1a_1},T_{1b_1}])=[\varphi_*(T_{1a_1}),\varphi_*(T_{1b_1})]. \tag{1.7.4}$$

如是 φ_* 定义了李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}$ 的同态. 如果 $\varphi:G_1\to G$ 是一局部同构，其逆映照 φ^{-1} 也是局部同构. 由于

$$\varphi^a(\varphi^{-1}(\sigma))=\sigma^a,$$

可知 $\det\left(\frac{\partial\sigma^a}{\partial\sigma_1^b}\right)_{\sigma_1=0}\neq 0$，故 $\varphi_*:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}$ 是一同构.

定理 1.7.1 设 V 是 R^m 的开集，G 是 r 维李群，$\mathscr{R}:G\to GL(N_1,R)$ 是局部同态，则

(i) $\mathscr{R}^{-1}(A(\sigma))d\mathscr{R}(A(\sigma))=\theta^a(\sigma)C_a$,

其中 C_a 是 $N_1\times N_1$ 常数方阵，$\theta^a(\sigma)=v_b^a(\sigma)d\sigma^b$ 是由(1.2.9)中的 $v_b^a(\sigma)$ 定义的一次式；

(ii) 若 $\Gamma_j^a(x)T_a$ 是 V 中的 G 型联络，则

$C_a\Gamma_j^a(x)$ 是对于联接函数 $\psi_{\tilde{V}V}(x)=\mathscr{R}(\varphi_{\tilde{V}V}(x))$ 的 $GL(N_1,R)$ 型联络.

证 (i) 首先，由 (1.2.4) 知道

$$v_b^a(\psi(\sigma_0,\sigma))d\psi^b(\sigma_0,\sigma)T_a = [A(\sigma_0)A(\sigma)]^{-1}d[A(\sigma_0)A(\sigma)]$$
$$= A^{-1}(\sigma)dA(\sigma) = v_b^a(\sigma)d\sigma^b T_a,$$

即有

$$\theta^a(\psi(\sigma_0,\sigma)) = \theta^a(\sigma), \tag{1.7.5}$$

即 $\theta^a(\sigma)$ 是左不变式.

其次,若 $\theta(\sigma)$ 是任一左不变式, 即 $\theta(\psi(\sigma_0,\sigma)) = \theta(\sigma)$, 则由于$(v_b^a(\sigma))$是非异方阵

$$\theta(\sigma) = A_a(\sigma)d\sigma^a = A_a(\sigma)u_b^a(\sigma)v_c^b(\sigma)d\sigma^c$$
$$= B_a(\sigma)\theta^a(\sigma)$$

及由于 $\theta^a(\sigma)$是左不变式,必定有

$$B_a(\psi(\sigma_0,\sigma)) = B_a(\sigma).$$

对任意的 σ_0, 取 σ_0 使 $A(\sigma_0) = A^{-1}(\sigma)$, 则有 $B_a(\sigma) = B_a(0)$ 是常数.

现在 $\mathscr{R}^{-1}(A(\sigma_0)A(\sigma))d\mathscr{R}(A(\sigma_0)A(\sigma)) = \mathscr{R}^{-1}(A(\sigma)) \times d\mathscr{R}(A(\sigma))$, 这是左不变的, 因此存在 $N_1 \times N_1$ 常数方阵 C_a, 使

$$\mathscr{R}^{-1}(A(\sigma))d\mathscr{R}(A(\sigma)) = \theta^a(\sigma)C_a. \tag{1.7.6}$$

(ii) 由上式,如证式(1.2.6)一样,可证

$$\mathscr{R}^{-1}(A(\tau))C_a\mathscr{R}(A(\tau)) = Ad(\tau)_a^b C_b.$$

由此及由(1.7.6),(1.2.8)可知

$$C_a\tilde{\Gamma}_j^a = C_a Ad(\varphi_{V\tilde{V}}(x))_b^a \Gamma_k^b \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$
$$+ C_a v_b^a(\varphi_{V\tilde{V}}(x))\frac{\partial \varphi_{V\tilde{V}}^b(x)}{\partial \tilde{x}^j}$$
$$= \mathscr{R}^{-1}(\varphi_{V\tilde{V}}(x))C_b\Gamma_k^b\mathscr{R}(\varphi_{V\tilde{V}}(x))\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$
$$+ \mathscr{R}^{-1}(\varphi_{V\tilde{V}}(x))\frac{\partial \mathscr{R}(\varphi_{V\tilde{V}}(x))}{\partial \tilde{x}^j},$$

据(1.2.8)，$\Gamma^a_j C_a$ 是 $GL(N_1,K)$ 型联络，定理得证。

设H是矩阵李群G的子群，可以选取参数σ^a使得$\mathfrak{W}_\varepsilon\cap H$的方阵是 $\mathfrak{W}_\varepsilon$ 中的方阵 $A(\sigma^1,\cdots,\sigma^r)$ 由如下元素组成 $A(\sigma^1_\varepsilon,\cdots,\sigma^s,0,\cdots,0)$，$s\leqslant r$，则$H$称为$G$的李子群。显然易见，$G$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的自然基 $\{T_a\}$ 中 $T_1,\cdots T_s$ 是H的李代数 $\mathfrak{h}$ 的自然基。

定理 1.7.2（约化定理） 设H是矩阵李群G的李子群，令$\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$，又设

Γ^a_j是V中G型联络，若当$B\in H$，$T_a\in\mathfrak{h}$有

$$B^{-1}T_aB\in\mathfrak{m},$$

则$\Gamma^a_j(a=1,\cdots,s)$是V中H型联络。

证 实质上

$$\Gamma^a_jT_a=\sum_{a=1}^{s}\Gamma^a_jT_a+\sum_{a=s+1}^{r}\Gamma^a_jT_a,$$

于是当$\varphi_{\tilde{V}V}(x)\in H$时，有

$$\sum_{a=1}^{s}\tilde{\Gamma}^a_jT_a+\sum_{a=s+1}^{r}\tilde{\Gamma}^a_jT_a=\left[\varphi_{\tilde{V}V}\left(\sum_{a=1}^{s}\Gamma^a_jT_a\right)\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}\right.$$

$$\left.-\varphi_{\tilde{V}V}\frac{\partial\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}}{\partial x^k}\right]\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}$$

$$+\varphi_{\tilde{V}V}\left(\sum_{a=s+1}^{r}\Gamma^a_jT_a\right)\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^k}.$$

上式右边第一项属于$\mathfrak{h}$，第二项属于$\mathfrak{m}$，因此有

$$\sum_{a=s+1}^{r}\tilde{\Gamma}^a_jT_a=\varphi_{\tilde{V}V}\left(\sum_{a=s+1}^{r}\Gamma^a_jT_a\right)\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^k},$$

及

$$\sum_{a=1}^{s}\tilde{\Gamma}^a_jT_a=\left(\varphi_{\tilde{V}V}\left(\sum_{a=1}^{s}\Gamma^a_jT_a\right)\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}-\varphi_{\tilde{V}V}\frac{\partial\varphi^{-1}_{\tilde{V}V}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i},$$

此即 $\sum_{\alpha=s+1}^{r} \Gamma_j^\alpha T_\alpha$ 是一张量，而 $\sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma_j^\alpha T_\alpha$ 是 H 型联络。 定理得证。

参 考 文 献

[1] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press, (1949).

[2] S. I. Goldberg, Curvature and Homology, N. Y., Academic Press, (1962).

[3] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Space, N. Y., Academic Press, (1962).

[4] G. De Rham, Variétés Differentiales, Publ. de l'institut math. de l'univ. de Nancago, (1955).

[5] R. Utiyama, Invariant Theoritical Interpretation of Intersection, *Phys. Rev.*, **101**, 1597, (1956).

[6] C. N. Yang and P. L. Mills, Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954).

[7] 陆启铿，规范场与主纤维丛上的联络，物理学报，**23**，249(1974)。

第二章　四 维 空 间

§ 2.1　四维空间的曲率张量

近代物理学所考虑的空间(空-时)是四维的，所以这里特别对四维空间进行讨论．本章中的讨论是局部的，即是不妨设 V 是 R^4 的开集．本节将着重讨论四维空间中张量所特有的性质．设 $X_a = e^i_{(a)} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是 V 中一组标架，ω^a 是对偶标架．设 V 是有二阶协变、对称非异的可微分向量场 g_{ab}．令

$$ds^2 = g_{ab}\omega^a\omega^b \tag{2.1.1}$$

称为(微分)度量．如果取 ω^a 为伪正交标架，于是上式可写为

$$ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b. \tag{2.1.2}$$

在(1.3.29)中取 $m = 4$，则 Weyl 张量对于伪正交标架为

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(\eta_{a[c}R_{d]b} - \eta_{b[c}R_{d]a}) + \frac{R}{6}\eta_{a[c}\eta_{d]b}. \tag{2.1.3}$$

对于任意的四阶协变张量，满足条件

$$F_{abcd} = -F_{bacd},\quad F_{abcd} = -F_{abdc}, \tag{2.1.4}$$

我们可定义它的左对偶与右对偶张量为

$${}^*F_{abcd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abef}F^{ef}{}_{cd},\quad F^*_{abcd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{cdef}F_{ab}{}^{ef}, \tag{2.1.5}$$

其中

$$F^{ef}{}_{cd} = \eta^{ea}\eta^{fb}F_{abcd},\quad F_{ab}{}^{ef} = \eta^{ce}\eta^{fd}F_{abcd}.$$

令 $\operatorname{sgn}(g)$ 表示 $g = \det(g_{ij})$ 的符号，容易证明：

$$^{**}F_{abcd} = \mathrm{sgn}(g) F_{abcd}, \quad F^{**}_{abcd} = \mathrm{sgn}(g) F_{abcd}. \tag{2.1.6}$$

定理 2.1.1 设 $F_{jl} = F^k_{jkl}$ 是对称的，并且满足 $F_{ijkl} = F_{klij}$。令 $F = F^j_j$，则有恒等式

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(g)^* F^*_{ijkl} = F_{ijkl} &+ (g_{kj}F_{li} - g_{lj}F_{ki} + g_{li}F_{kj} \\ &- g_{ki}F_{lj}) + \frac{F}{2}(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}).\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

证 据定义，对于自然标架

$$\begin{aligned}
^*F^*_{hjkl} &= \frac{1}{4} \varepsilon_{hjpq} F^{pqrs} \varepsilon_{rskl} \\
&= \frac{1}{4} g_{ku} g_{lv} F^{pq}{}_{rs} \varepsilon_{hjpq} \varepsilon^{rsuv} \\
&= \frac{\mathrm{sgn}(g)}{4} g_{ku} g_{lv} F^{pq}{}_{rs} \delta^{rsuv}_{hjpq} \\
&= \frac{\mathrm{sgn}(g)}{4} g_{ku} g_{lv} F^{pq}{}_{rs} \{\delta^r_h \delta^{suv}_{jpq} - \delta^r_j \delta^{suv}_{hpq} + \delta^r_p \delta^{suv}_{hjq} - \delta^r_q \delta^{suv}_{hjp}\} \\
&= \frac{\mathrm{sgn}(g)}{4} g_{ku} g_{lv} F^{pq}{}_{rs} \{\delta^r_h [\delta^s_j \delta^{uv}_{pq} - \delta^s_p \delta^{uv}_{jq} + \delta^s_q \delta^{uv}_{jp}] \\
&\quad - \delta^r_j [\delta^s_h \delta^{uv}_{pq} - \delta^s_p \delta^{uv}_{hq} + \delta^s_q \delta^{uv}_{hp}] + \delta^r_p [\delta^s_h \delta^{uv}_{jq} - \delta^s_j \delta^{uv}_{hq} \\
&\quad + \delta^s_q \delta^{uv}_{hj}] - \delta^r_q [\delta^s_h \delta^{uv}_{jp} - \delta^s_j \delta^{uv}_{hp} + \delta^s_p \delta^{uv}_{hj}]\} \\
&= \frac{\mathrm{sgn}(g)}{4} \{[2 g_{ku} g_{lv} F^{uv}{}_{hj} - (g_{kj} g_{lq} - g_{kq} g_{lj}) F^{pq}{}_{hp} \\
&\quad + (g_{kj} g_{lp} - g_{kp} g_{lj}) F^{pq}{}_{hq}] - [2 g_{ku} g_{lv} F^{uv}{}_{jh} \\
&\quad - (g_{kh} g_{lq} - g_{kq} g_{lh}) F^{pq}{}_{jp} + (g_{kh} g_{lp} \\
&\quad - g_{kp} g_{lh}) F^{pq}{}_{jq}] + [(g_{kj} g_{lq} - g_{kq} g_{lj}) F^{pq}{}_{ph} \\
&\quad - (g_{kh} g_{lq} - g_{kq} g_{lh}) F^{pq}{}_{pj} + (g_{kh} g_{lj} - g_{kj} g_{lh}) F^{pq}{}_{pq}] \\
&\quad - [(g_{kj} g_{lp} - g_{kp} g_{jl}) F^{pq}{}_{qh} - (g_{kh} g_{lp} \\
&\quad - g_{kp} g_{lh}) F^{pq}{}_{qj} + (g_{kh} g_{lj} - g_{kj} g_{lh}) F^{pq}{}_{qp}]\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{sgn}(g)}{4}\{[2F_{klih} + (g_{kj}\bar{F}_{ih} - g_{lj}\bar{F}_{kh})$$
$$+ (g_{kj}F_{lh} - g_{lj}F_{kh})] - [2F_{klih} + (g_{kh}F_{lj}$$
$$- g_{lh}F_{kj}) + (g_{kh}F_{lj} - g_{lh}F_{kj})] + [(g_{kj}F_{lh}$$
$$- g_{lj}F_{kh}) - (g_{kh}F_{lj} - g_{lh}F_{kj}) + (g_{kh}g_{lj}$$
$$- g_{lh}g_{kj})F] - [-(g_{kj}F_{lh} - g_{lj}F_{kh})$$
$$+ (g_{kh}F_{lj} - g_{lh}F_{kj}) - (g_{kh}g_{lj} - g_{lh}g_{kj})F]\}$$
$$= \mathrm{sgn}(g)\{F_{hjkl} + (g_{kj}F_{lh} - g_{lj}F_{kh} + g_{lh}F_{kj}$$
$$- g_{kh}F_{lj}) + \frac{1}{2}(g_{kh}g_{lj} - g_{lh}g_{kj})F\},$$

定理得证.

令

$$G_{ijkl} = g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{kj}, \tag{2.1.8}$$

则

$$G_{jl} = G^{k}{}_{jkl} = 3g_{jl}, \quad G = G^{i}{}_{i} = 12.$$

应用定理 2.1.1 有

$$\mathrm{sgn}(g)^{*}G^{*}_{ijkl} = G_{ijkl} + 3(g_{kj}g_{li} - g_{lj}g_{ki} + g_{li}g_{kj}$$
$$- g_{ki}g_{lj}) + 6(g_{ki}g_{lj} - g_{li}g_{kj}),$$

即

$$\mathrm{sgn}(g)^{*}G^{*}_{ijkl} = G_{ijkl}. \tag{2.1.9}$$

令

$$E_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl} - g_{kj}R_{il} - g_{il}R_{jk} + g_{lj}R_{ik})$$
$$- \frac{R}{4}(g_{ik}g_{jl} - g_{kj}g_{il})$$
$$= \frac{1}{2}(g_{ik}S_{jl} - g_{kj}S_{il} - g_{il}S_{jk} + g_{lj}S_{ik}), \tag{2.1.10}$$

其中

$$S_{jk}=R_{jk}-\frac{R}{4}g_{jk}. \qquad (2.1.11)$$

显而易见

$$E_{jl}=E^{k}{}_{jkl}=S_{jl},\ E=E^{j}_{j}=0.$$

应用定理 2.1.1，有

$$\mathrm{sgn}(g)^{*}E^{*}_{ijkl}=E_{ijkl}+(g_{kj}S_{il}-g_{lj}S_{ik}+g_{li}S_{jk}-g_{ki}S_{jl})$$

此即

$$\mathrm{sgn}(g)^{*}E^{*}_{ijkl}=-E_{ijkl}. \qquad (2.1.12)$$

应用定理 2.1.1 于黎曼曲率张量可得

$$\begin{aligned}R_{ijkl}&=\frac{1}{2}[R_{ijkl}+\mathrm{sgn}(g)^{*}R^{*}_{ijkl}]\\&+\frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl}-g_{kj}R_{il}-g_{il}R_{jk}+g_{lj}R_{ik})\\&-\frac{R}{4}(g_{ik}g_{jl}-g_{ki}g_{jl})\\&=\frac{1}{2}[R_{ijkl}+\mathrm{sgn}(g)^{*}R^{*}_{ijkl}]+E_{ijkl},\end{aligned} \qquad (2.1.13)$$

将其代入 (2.1.3)，有

$$C_{ijkl}=\frac{1}{2}[R_{ijkl}+\mathrm{sgn}(g)^{*}R^{*}_{ijkl}]-\frac{R}{12}G_{ijkl}. \qquad (2.1.14)$$

两式相减可得

$$R_{ijkl}=C_{ijkl}+E_{ijkl}+\frac{R}{12}G_{ijkl}, \qquad (2.1.15)$$

这称为 Géhéniau-Debever 分解。

又由(2.1.9)与(2.1.14)可知

$$\mathrm{sgn}(g)^{*}C^{*}_{ijkl}=C_{ijkl}. \qquad (2.1.16)$$

此外，由(2.1.15)容易得出：

定理 2.1.2 若 $R_{jk}=0$，则

$$R_{ijkl}=C_{ijkl}=\frac{1}{2}[R_{ijkl}+\mathrm{sgn}(g)^*R^*_{ijkl}].$$

利用对偶张量的定义，式(1.3.28)可写为

$$g^{ik}C^*_{ijkl}=0. \tag{2.1.17}$$

同理，Bianchi 恒等式亦可写为

$$g^{lh}R^*_{ijkl;h}=0. \tag{2.1.18}$$

§2.2 $U(1)$ 规范场；磁单极；电磁辐射条件

设 $U(1)$ 是 $e^{-\sqrt{-1}\theta}$ 的乘法群，Γ^1_{1j} 是 V 中的 $U(1)$ 型联络。对于局部坐标变换有

$$\tilde{\Gamma}^1_{1j}=\left(e^{-\sqrt{-1}\theta}\Gamma^1_{1k}e^{\sqrt{-1}\theta}-e^{-\sqrt{-1}\theta}\frac{\partial e^{\sqrt{-1}\theta}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^j}$$

$$=\left(\Gamma^1_{1k}-\sqrt{-1}\frac{\partial\theta}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^j}. \tag{2.2.1}$$

令 $\Gamma^1_{1j}(x)=-\sqrt{-1}A_j(x)$，上式即

$$\tilde{A}_j(\tilde{x})=\left(A_k(x)+\frac{\partial\theta}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^j}. \tag{2.2.2}$$

由此可知，曲率张量为

$$R^1_{1jk}=\frac{\partial\Gamma^1_{1k}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^1_{1j}}{\partial x^k}.$$

令

$$R^1_{1jk}=-\sqrt{-1}F_{jk}(x),$$

上式即

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{2.2.3}$$

上面反称的张量 F_{ik} 在物理上称为 $U(1)$ 规范场或电磁场张量。 Bianchi 恒等式为

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0. \tag{2.2.4}$$

而杨振宁方程则为

$$g^{kl}F_{ik;l}=0. \tag{2.2.5}$$

通常把式(2.2.4)与(2.2.5)一起称为 Maxwell 方程。令

$$\omega=F_{ik}dx^i\wedge dx^k, \tag{2.2.6}$$

则上面的两个方程写为外微分的形式即为

$$d\omega=0,\quad \delta\omega=0. \tag{2.2.7}$$

由第一个方程,应用 Poincaré 引理得知存在一次式 $\alpha=A_idx^i$,使得局部地 $\omega=d\alpha$,将其代入(2.2.7)第二式有

$$\delta d\alpha=0 \tag{2.2.8}$$

如果我们假定 α 满足 Lorentz 条件,即

$$\delta\alpha=g^{ik}A_{i;k}=0, \tag{2.2.9}$$

则式(2.2.8)可写为 $(\delta d+d\delta)\alpha=0$,此即

$$\Delta\alpha=0. \tag{2.2.10}$$

由(1.6.25)知,上式即为

$$g^{ik}(A_{i;jk}-A_jR_{kl})=0. \tag{2.2.11}$$

物理学上通常取

$$g_{ik}=\eta_{ik},\quad (\eta_{ik})=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}, \tag{2.2.12}$$

并且指标 $i,j,k\cdots=0,1,2,3$。此时(2.2.5)化为

$$\frac{\partial F_{i0}}{\partial x^0}-\frac{\partial F_{i1}}{\partial x^1}-\frac{\partial F_{i2}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{i3}}{\partial x^3}=0. \qquad (2.2.13)$$

此外，通常把反称张量写为

$$(F_{ik})=\begin{pmatrix}0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13}\\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23}\\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2\\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1\\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0\end{pmatrix}, \qquad (2.2.14)$$

其中 $\mathbf{E}=(E_1,E_2,E_3)$ 称为电场向量，$\mathbf{H}=(H_1,H_2,H_3)$ 称为磁场向量。

现在举一个只有磁场而无电场的静态球对称解，此即电场分量皆为零，即

$$E_1=F_{01}=0,\ E_2=F_{02}=0,\ E_3=F_{03}=0,$$

而磁场分量取为

$$H_1=F_{23}=\frac{\eta x^1}{r^3},\quad H_2=F_{31}=\frac{\eta x^2}{r^3},\quad H_3=F_{12}=\frac{\eta x^3}{r^3},$$

其中 η 为一非零常数，$r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$.

令

$$A_0=A_1=0,\quad A_2=\eta\int_0^{x^1}\frac{x^3du}{[u^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{3/2}},$$

$$A_3=-\eta\int_0^{x^1}\frac{x^2du}{[u^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{3/2}}.$$

由此得知

$$\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}=\eta\frac{x^3}{r^3}=F_{12},$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^3}-\frac{\partial A_3}{\partial x^1}=\eta\frac{x^2}{r^3}=F_{31},$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}=-\eta\int_0^{x^1}\left\{\frac{2}{[u^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{3[(x^2)^2+(x^3)^2]}{[u^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{3/2}}\right\}du$$

$$=\eta\int_0^{x^1}\frac{\partial}{\partial u}\frac{udu}{[u^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{3/2}}=\eta\frac{x^1}{r^3}=F_{23}.$$

由此可知，如此的 F_{jk} 必然满足于第一组 Maxwell 方程(2.2.4). 此外，由直接计算容易得知第二组 Maxwell 方程(2.2.13) 亦满足.

现设 $V=R^4-\{0\}$. 取 S 为一个包含于 V 中的一个球面: $x^0=$ 常数, $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2$, R 为正常数，则用 Gauss-Ostrogradski 积分公式可知

$$\iint_S F_{ik}dx^i\wedge dx^k=\frac{\eta}{R^3}\iint_{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2}x^1dx^2\wedge dx^3$$

$$+x^2dx^3\wedge dx^1+x^3dx^1\wedge dx^2$$

$$=\frac{3\eta}{R^3}\iiint_{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\leqslant R^2}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=4\pi\eta.$$

值得注意的是，由上面的积分可知道

$$\iint_S F_{jk}dx^j\wedge dx^k=\iint_S d(A_jdx^j)=4\pi\eta\neq 0.$$

有些人认为一个全微分 $d(A_jdx^j)$ 在一个闭曲面上的积分为零，这是对 Gauss-Ostrogradski 公式成立的条件没有弄清楚所致. η 在物理学上被解释为磁荷，而在 $x^1=x^2=x^3=0$ 点有磁单极. 不难证明，如令

$$F_{0j}=0,\quad F_{23}=\eta\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{x^1-x_\alpha^1}{r_\alpha^3},$$

$$F_{31}=\eta\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{x^2-x_\alpha^2}{r_\alpha^3},\quad F_{12}=\eta\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{x^3-x_\alpha^3}{r_\alpha^3},$$

其中 x_α^1，x_α^2，x_α^3 $(\alpha=1,\cdots,N)$ 为常数，

$r_\alpha=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i-x_\alpha^i)^2}$，则当 R 充分大时，应用 Gauss-Ostrogradski 公式可证

$$\iint_S F_{jk}dx^j\wedge dx^k=4\pi N\eta.$$

现取 $V=R^4$，$g_{ik}=\eta_{ik}$，令

$$\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}(E_2H_3-E_3H_2,E_3H_1-E_1H_3,E_1H_2-E_2H_1),\tag{2.2.15}$$

这称为(三维的)能流向量或 Poynting 向量．又令

$$T_{ij}=\frac{1}{4}\eta_{ij}F_{kl}F^{kl}-\eta^{kl}F_{ik}F_{jl},\tag{2.2.16}$$

这称为电磁场的能量-动量张量．一向量 ξ^i 称为类时、类空或类光的，视 $\eta_{ik}\xi^i\xi^k$ 是>0，<0 或$=0$ 而定．

由 (2.2.16) 可知

$$T_{00}=\frac{1}{2}(E_1^2+E_2^2+E_3^2+H_1^2+H_2^2+H_3^2),$$

$$T_{01}=E_2H_3-E_3H_2,\quad T_{02}=E_3H_1-E_1H_3,$$

$$T_{03}=E_1H_2-E_2H_1,$$

$$T_{11}=\frac{1}{2}(-E_1^2+E_2^2+E_3^2-H_1^2+H_2^2+H_3^2),$$

$$T_{12}=-(E_1E_2+H_1H_2),\quad T_{13}=-(E_1E_3+H_1H_3),$$

$$T_{23}=-(E_2E_3+H_2H_3),$$

$$T_{22}=\frac{1}{2}(E_1^2-E_2^2+E_3^2+H_1^2-H_2^2+H_3^2),$$

$$T_{33}=\frac{1}{2}(E_1^2+E_2^2-E_3^2+H_1^2+H_2^2-H_3^2).\quad(2.2.17)$$

由此可见，Poynting 向量可以写为四维形式

$$S_j=\frac{1}{4\pi}(\delta_j^0T_{00}-T_{j0})=\frac{1}{4\pi}(\delta_j^0\delta_0^k-\delta_j^k)T_{kl}\delta_0^l.\quad(2.2.18)$$

给与 V 中的一四维伪正交标架 $\{e_{(a)}^i\}$，即

$$\eta_{ab}=\eta_{ij}e_{(a)}^ie_{(b)}^j,\quad(2.2.19)$$

这表示 $E=\{e_{(a)}^i\}$ 成一 Lorentz 方阵. 令 $v^i=e_{(0)}^i$，这称为此标架对于原来的自然标架的四维速度向量. 由(2.2.19)得知，v^i 是类时向量，物理学上被解释为此标架相对于原来标架的速度小于光速. 如果我们不论选择任何标架，Poynting 向量皆不为零， 则我们说有电磁辐射， 如能选择一标架使得 Poynting 向量 S_j 为零，就说没有电磁辐射.

设对新的标架 Poynting 向量

$$S_a=(\delta_a^0\delta_0^b-\delta_a^b)T_{bc}\delta_0^c=0,$$

此即

$$T_{bc}\delta_a^b\delta_0^c=T_{bc}\delta_a^0\delta_0^b\delta_0^c,\quad(2.2.20)$$

其中

$$T_{bc}=T_{kl}e_{(b)}^ke_{(c)}^l.$$

将其代入(2.2.20)，并且以 $e_j^{(a)}$ 乘(2.2.20)两边，得出

$$T_{jl}v^l=(T_{kl}v^kv^l)v_j,\quad(2.2.21)$$

其中 $v^k=e_{(0)}^k$，$v_j=\eta_{jk}v^k$，此表示 v^i 必然是 T_{jk} 的特征向量，这就是说，如果没有电磁辐射，T_{jk} 存在类时的特征向量. 反之，如果 T_{jk} 存在类时的特征向量，我们不妨假定 $\eta_{jk}v^jv^k=1$，而作一 Lorentz 方阵 $E=\{e_{(a)}^i\}$ 使得第一行元素 $e_{(0)}^i=v^i$，于是对于新的标架，Poynting 向量为零，故没

有电磁辐射. 这证明了对于电磁场 F_{ik} 没有电磁辐射的充要条件为能量、动量、张量 T_{ik} 存在类时特征向量.

现在我们把能量、动量、张量进行分类. 看哪一类是有电磁辐射的.

我们选取伪正交标架, 即选取 Lorentz 变换

$$F_{ab}=F_{ik}e^{i}_{(a)}e^{k}_{(b)},$$

使得 $F_{01}=0$, $F_{13}=0$. 即不妨假定原来就有

$$E_1=H_1=0.$$

由(2.2.17)得知

$$T_{02}=T_{03}=T_{12}=T_{13}=0,\quad T_{00}=T_{11},\quad T_{22}=-T_{33},$$

此即方阵

$$(T_{ik})=\begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & 0 & 0\\ T_{10} & T_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & T_{22} & T_{23}\\ 0 & 0 & T_{32} & T_{33}\end{pmatrix}.$$

令 $T^{i}_{k}=\eta^{il}T_{lk}$, 则方阵

$$T=(T^{i}_{k})=\begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & 0 & 0\\ -T_{10} & -T_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -T_{22} & -T_{23}\\ 0 & 0 & -T_{32} & -T_{33}\end{pmatrix}, \tag{2.2.22}$$

此方阵之特征方程为

$$\det(\lambda I-T)=(\lambda^2+T^2_{01}-T^2_{00})(\lambda^2-T^2_{22}-T^2_{23})=0.$$

由(2.2.17)可知

$$-T^2_{01}+T^2_{00}=T^2_{23}+T^2_{22}=\frac{1}{4}[(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)^2+4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.23}$$

其中 $\mathbf{E}^2=E^2_1+E^2_2+E^2_3$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=E_1H_1+E_2H_2+E_3H_3$. 令

$$\sigma = \frac{1}{2}[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.2.24)$$

则T的特征根为

$$\lambda = \sigma, \sigma, -\sigma, -\sigma. \qquad (2.2.25)$$

现分两种情形进行下述讨论:

(i) $\sigma \neq 0$,没有电磁辐射.当$T_{01}=0$时，$T_{00}=\sigma$，显然$\xi^0=1$，$\xi^1=\xi^2=\xi^3=0$ 是T的类时特征向量．当 $T_{01}\neq 0$时,(2.2.22)定义的特征向量 ξ^i 是方程

$$(T_{00}-\lambda)\xi^0 + T_{01}\xi^1 = 0,\quad -T_{01}\xi^0 - (T_{00}+\lambda)\xi^1 = 0,$$
$$-(T_{22}+\lambda)\xi^2 - T_{23}\xi^3 = 0,\quad -T_{32}\xi^2 - (T_{33}+\lambda)\xi^3 = 0$$

之解．上方程有解

$$\xi^0 = T_{01},\quad \xi^1 = -(T_{00}-\lambda),\quad \xi^2 = \xi^3 = 0.$$

而由特征根满足 $\lambda^2=\sigma^2$ 得知

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = T_{01}^2 - (T_{00}-\lambda)^2$$
$$= 2T_{00}\lambda - 2\lambda^2 = 2\lambda(\sqrt{\lambda^2+T_{01}^2} - \lambda) > 0,$$

当我们取 $\lambda=\sigma$. 因此方阵T必存在类时特征向量，故没有电磁辐射.

(ii) $\sigma = 0$，有电磁辐射.

由(2.2.23)—(2.2.24)可知

$$T_{22} = T_{23} = 0,\quad T_{10}^2 = T_{00}^2,$$

即

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{H}^2,\quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0,$$

这表示电场向量与磁场向量互相垂直、且大小相等．此外，特征向量是方程

$$T_{00}\xi^0 + T_{01}\xi^1 = 0,\quad -T_{01}\xi^0 - T_{00}\xi^1 = 0$$

之解． 此解必须是 $\xi^0=\rho T_{01}$，$\xi^1=-\rho T_{00}$,ξ^2,ξ^3 任意的形式，并且

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = -(\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 \leqslant 0,$$

即不存在类时的特征向量，故有电磁辐射。

§2.3 $O(4)$ 规范场；同步对称解；类粒子解

设 $V = R^4$，$O(4)$ 型联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$ 称为同步对称的。如果作任一实正交线性变换

$$\tilde{x}^i = O^i_k x^k, \tag{2.3.1}$$

有

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta j}(\tilde{x}) = \Gamma^{\lambda}_{\mu k}(x) O^{\alpha}_{\lambda} O_{\beta}^{-1\mu} O_j^{-1k}. \tag{2.3.2}$$

在 R^4 中可引进欧氏微分度量

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

而把 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$ 的指标下降为 $\Gamma_{\alpha\beta j} = \delta_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta j}$。由于

$$O^{\alpha}_{\lambda} = O_{\alpha}^{-1\lambda},$$

(2.3.2)可写为

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta j}(\tilde{x}) = \Gamma_{\lambda\mu k}(x) O_{\alpha}^{-1\lambda} O_{\beta}^{-1\mu} O_j^{-1k}. \tag{2.3.3}$$

令 $\xi^\alpha, \eta^\beta, \zeta^j$ 为 V 中的向量，由上式可知

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta j}(\tilde{x}) \tilde{\xi}^\alpha \tilde{\eta}^\beta \tilde{\zeta}^j = \Gamma_{\lambda\mu k}(x) \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^k,$$

即在正交群下是不变的。由 H. Weyl[6] 的关于正交群下不变量的定理可知，$\Gamma_{\lambda\mu k}(x)\xi^\lambda\eta^\mu\zeta^k$ 必定是向量 x^i，ξ^α，η^β，ζ^j 的各种可能内积的函数，但是它是 ξ^α，η^β，ζ^j 的线性函数，因此只可能是下面的形式

$$\Gamma_{\lambda\mu j}(x)\xi^j\eta^\lambda\zeta^\mu = a(\tau)x^i\xi^i\eta^k\zeta^k + b(\tau)x^i\eta^i\xi^k\zeta^k + c(\tau)x^i\zeta^i\xi^k\eta^k + d(\tau)x^i\xi^i x^k\zeta^k x^l\eta^l,$$

其中 $\tau = x^i x^i$。比较 $\xi^\alpha, \eta^\beta, \zeta^j$ 的系数有

$$\Gamma_{\lambda\mu j}(x) = a(\tau)x^j\delta_{\lambda\mu} + b(\tau)x^\lambda\delta_{\mu j} + c(\tau)x^\mu\delta_{\lambda j} + d(\tau)x^j x^\lambda x^\mu. \tag{2.3.4}$$

由于 $\Gamma_{\lambda\mu j}(x)$ 是正交标架的联络，在(1.4.23)中 $\eta_{cd} = \delta_{dc}$，因此有

$$\Gamma_{\lambda\mu i} = -\Gamma_{\mu\lambda i}, \tag{2.3.5}$$

故（2.3.4）中必须 $a(\tau) = d(\tau) = 0$，$c(\tau) = -b(\tau)$，即（2.3.4）必为如下的形式

$$\Gamma_{\lambda\mu i}(x) = f(\tau)(x^\lambda \delta_{\mu i} - x^\mu \delta_{\lambda i}), \quad \tau = x^i x^i, \tag{2.3.6}$$

其中 $f(\tau)$ 是 τ 的任意可微分函数.

规范场(或曲率张量)据定义为

$$R_{\alpha\beta jk} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta j}}{\partial x^k} + \Gamma_{\gamma\alpha j}\Gamma_{\beta\gamma k} - \Gamma_{\gamma\alpha k}\Gamma_{\beta\gamma j}. \tag{2.3.7}$$

用(2.3.6)代入上式得出

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta jk} = & (2f - \tau^2 f^2)(\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\delta_{k\alpha}) \\ & + \left(\frac{1}{\tau}\frac{df}{d\tau} + f^2\right)(x^\alpha x^j \delta_{\beta k} - x^\alpha x^k \delta_{\beta j} \\ & + x^\beta x^k \delta_{\alpha j} - x^\beta x^j \delta_{\alpha k}), \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

将其代入杨振宁方程

$$\delta^{kl} R_{\alpha\beta jk;l} = \frac{\partial R_{\alpha\beta jk}}{\partial x^l} - R_{\gamma\beta jk}\Gamma_{\gamma\alpha l} - R_{\alpha\gamma jk}\Gamma_{\gamma\beta l} = 0,$$

得出

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta jk;k} = & \left(\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \frac{5}{\tau}\frac{df}{d\tau} + 6f^2\right. \\ & \left. - 2\tau^2 f^3\right)(x^\beta \delta_{\alpha j} - x^\alpha \delta_{\beta j}) = 0. \end{aligned}$$

由此可知，满足杨振宁方程的同步对称 $O(4)$ 规范势（2.3.6）的必要充分条件为 f 满足方程

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \frac{5}{\tau}\frac{df}{d\tau} + 6f^2 - 2\tau^2 f^3 = 0. \tag{2.3.9}$$

为了解此常微分方程，我们作变换

$$f(\tau) = \frac{\varphi(\chi)}{\tau^2}, \quad \chi = \log \tau, \tag{2.3.10}$$

于是(2.3.9)化为

$$\frac{d^2\varphi}{d\chi^2} = 2\varphi^3 - 6\varphi^2 + 4\varphi, \tag{2.3.11}$$

两边乘以 $2\frac{d\varphi}{d\chi}$ 得出

$$\frac{d}{d\chi}\left(\frac{d\varphi}{d\chi}\right)^2 = (4\varphi^3 - 12\varphi^2 + 8\varphi)\frac{d\varphi}{d\chi}, \tag{2.3.12}$$

积分可得

$$\left(\frac{d\varphi}{d\chi}\right)^2 = \varphi^4 - 4\varphi^3 + 4\varphi^2 + C_1,$$

其中 C_1 是积分常数．上式可写为

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^4 - 4\varphi^3 + 4\varphi^2 + C_1}} = \pm d\chi. \tag{2.3.13}$$

再积分一次便有

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^4 - 4\varphi^3 + 4\varphi^2 + C_1}} = \pm\log\frac{\tau}{\lambda}, \tag{2.3.14}$$

其中 λ 是另一积分常数．

现在我们讨论(2.3.14)左边的积分．令

$$P(\varphi) = \varphi^4 - 4\varphi^3 + 4\varphi^2 + C_1, \tag{2.3.15}$$

这是 φ 的四次多项式．如果 $P(\varphi) = 0$ 有重根，则必定也是

$$\frac{dP}{d\varphi} = 4\varphi^3 - 12\varphi^2 + 8\varphi = 4\varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)$$

的根，后者只当 $\varphi = 0, 1$ 或 2 时才是根．如果 φ 取这些值时仍然是 $P(\varphi)$ 的根，必须当 $C_1 = 0$ 或者 $C_1 = -1$ 时才有可能．现分别进行如下讨论：

(i) 当 $C_1 = -1$，此时(2.3.14)的积分为

$$\pm\log\frac{\tau}{\lambda} = \int\frac{d\varphi}{(\varphi - 1)\sqrt{(\varphi - 1)^2 - 2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left[\frac{\sqrt{2}}{\varphi - 1} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\varphi - 1}\right)^2 - 1}\right],$$

或者

$$\varphi = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\pm\sqrt{2}\log\frac{\tau}{\lambda}\right)},$$

故

$$f = \frac{1}{\tau^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\pm\sqrt{2}\log\frac{\tau}{\lambda}\right)}\right], \qquad (2.3.16)$$

此解在 $\tau = 0$ 有奇点.

(ii) 当 $C_1 = 0$，此时(2.3.14)为

$$\pm\log\frac{\tau}{\lambda} = \int\frac{d\varphi}{\varphi(\varphi-2)} = \frac{1}{2}\log\frac{2-\varphi}{\varphi}.$$

如果上式左边取正号，有

$$\varphi = \frac{2\lambda^2}{\tau^2+\lambda^2},$$

故

$$f = \frac{2\lambda^2}{\tau^2(\tau^2+\lambda^2)}, \qquad (2.3.17)$$

此解在 $\tau = 0$ 有奇点. 如果取负号，则

$$\varphi = \frac{2\tau^2}{\tau^2+\lambda^2},$$

故有解

$$f = \frac{2}{\tau^2+\lambda^2}, \qquad (2.3.18)$$

此解在整个空间无奇点.

(iii) 当 C_1 不为 0 或 -1，令 φ_0 为 $P(\varphi)$ 的单根中的任何一个. 于是(2.3.14)的左边为椭圆积分，可以用 Weierstrass 椭圆积分来表示[参阅 Whittaker-Watson[7]， p.453]

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \frac{\frac{dP}{d\varphi}(\varphi_0)}{\wp\left(\pm\log\frac{\tau}{\lambda};\, g_2, g_3\right) - \frac{1}{24}\frac{d^2P}{d\varphi^2}(\varphi_0)},$$

而(2.3.9)有解

$$f = \frac{1}{\tau^2}\left\{\varphi_0 + \frac{\frac{dP}{d\varphi}(\varphi_0)}{\wp\left(\pm\log\frac{\tau}{\lambda};\, g_2, g_3\right) - \frac{1}{24}\frac{d^2P}{d\varphi^2}(\varphi_0)}\right\}, \tag{2.3.19}$$

其中 $\wp\ (z; g_2, g_3)$ 是 Weierstrass 椭圆函数

$$g_2 = C_1 + \frac{4}{3},\quad g_3 = \frac{1}{3}C_1.$$

由 φ_0 不能为零，f 在 $\tau = 0$ 有奇点。

到此，我们得出方程(2.3.9)的所有可能的解，即(2.3.16)—(2.3.19)。这些解中包括了 Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin[1] 的类粒子解。他们的解要求在整个 $V = R^4$ 空间中没有奇点，这只能够是(2.3.18)，此时 f 满足

$$\frac{1}{\tau}\frac{df}{d\tau} + f^2 = 0,$$

因此由(2.3.8)可知规范场

$$R_{\alpha\beta jk} = \frac{2(\lambda^2 - \tau^2)}{(\lambda^2 + \tau^2)^2}(\delta_{\alpha j}\delta_{\beta k} - \delta_{\alpha k}\delta_{\beta j}).$$

显然它适合

$$\lim_{\tau\to\infty} R_{\alpha\beta jk} = 0.$$

此外，不难证明，它是自对偶的，即

$$R^*_{\alpha\beta jk} = {}^*R_{\alpha\beta jk},$$

并且积分$\iiiint_{R^4} R^{\alpha\beta jk} \overset{*}{R}_{\alpha\beta jk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 < \infty$,
称为能量有限.

§2.4 旋量; $SL(2,C)$ 规范场

设 V 是 R^4 的开集. 令 $SL(2,C)$ 为所有行列式为 1 的 2×2 复方阵所成的群. 如 $\mathfrak{A} \in SL(2,C)$,由

$$\det\mathfrak{A} = 1$$

可知

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^a}\log\det\mathfrak{A} = \operatorname{tr}\left(\mathfrak{A}^{-1}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\sigma^a}\right) = 0,$$

其中 $\sigma^a(a=1,2,3)$ 是 $SL(2,C)$ 的 3 个复参数. 故 $SL(2,C)$ 的复李代数 $sl(2,C)$ 的基

$$T_a = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\sigma^a}\right)_{\sigma=0}$$

适合

$$\operatorname{tr}(T_a) = \operatorname{tr}\left(\mathfrak{A}^{-1}(\sigma)\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\sigma^a}\right)_{\sigma=0} = 0. \tag{2.4.1}$$

如果令

$$T_a = (T^A_{a\,B})_{1\leqslant A,B\leqslant 2},$$

则有

$$T^A_{a\,A} = 0. \tag{2.4.2}$$

注意本节所用的量皆可以是复的,以 $\bar{\alpha}$ 表示一数 α 的复共轭,大写拉丁指标 $A,B,C,\cdots = 1,2$.

$SL(2,C)$ 型向量 ξ^A 称为旋量,若它的变换关系为

$$\tilde{\xi}^A = \alpha^A_B\xi^B,$$

其中 $\mathfrak{A} = (\alpha^A_B)_{1\leqslant A,B\leqslant 2} \in SL(2,C)$,

一$SL(2,C)$的$\begin{pmatrix} rs \\ pq \end{pmatrix}$型张量$T^{A_1\cdots A_r\bar{B}_1\cdots\bar{B}_s}_{C_1\cdots C_p\bar{D}_1\cdots\bar{D}_q}$是有如下变换关系的量:

$$\tilde{T}^{A_1\cdots A_r\bar{B}_1\cdots\bar{B}_s}_{C\cdots C\,\bar{D}_1\cdots\bar{D}_q} = T^{E_1\cdots E_r\bar{F}_1\cdots\bar{F}_s}_{G_1\cdots G_p\bar{H}_1\cdots\bar{H}_s}\alpha^{A_1}_{E_1}\cdots\alpha^{A_r}_{E_r}\bar{\alpha}^{B_1}_{F_1}\cdots\bar{\alpha}^{B_s}_{F_s}$$

$$\times\,\alpha^{-1G_1}_{C_1}\cdots\alpha^{-1G_p}_{C_p}\overline{\alpha^{-1H_1}_{D_1}}\cdots\overline{\alpha^{-1H_q}_{D_q}}. \tag{2.4.3}$$

设 Γ^A_{Bj} 是 $SL(2,C)$型联络,即要适合 $\Gamma^A_{Aj}=0$ 及有变换关系

$$\tilde{\Gamma}^A_{Bj} = \left(\Gamma^C_{Dk}\alpha^A_C\alpha^{-1D}_{\ B} - \alpha^{-1D}_{\ B}\frac{\partial\alpha^A_D}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^j}, \tag{2.4.4}$$

而相应的曲率张量为

$$F^A_{Bjk} = \frac{\partial\Gamma^A_{Bk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^A_{Bj}}{\partial x^k} + \Gamma^C_{Bk}\Gamma^A_{Cj} - \Gamma^C_{Bj}\Gamma^A_{Ck}, \tag{2.4.5}$$

这里指标 $j,k,\cdots=0,1,2,3$. 令

$$\Gamma_j = (\Gamma^A_{Bj})_{1\leqslant A,B\leqslant 2},\quad F_{jk} = (F^A_{Bjk})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}, \tag{2.4.6}$$

则(2.4.5)可写为

$$F_{jk} = \frac{\partial\Gamma_k}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_j}{\partial x^k} + [\Gamma_j,\Gamma_k]. \tag{2.4.7}$$

设 ϵ_{AB} 为一组数,由

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1,\quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$$

$$\text{或}\ \epsilon = (\epsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.8}$$

定义,则 ϵ_{AB} 是$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$型张量. 因为对任一 2×2 方阵 $\mathfrak{A}=(\alpha^A_B)$ 有

$$\mathfrak{A}'\epsilon\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & \det\mathfrak{A} \\ -\det\mathfrak{A} & 0 \end{pmatrix} = \epsilon\det\mathfrak{A}, \tag{2.4.9}$$

即 $\alpha^A_C\epsilon_{AB}\alpha^B_D = \det\mathfrak{A}\,\epsilon_{CD}$, 当 $\mathfrak{A}\in SL(2,C)$, 即 $\det\mathfrak{A}=1$ 有

$$\varepsilon_{AB}\alpha^A_C\alpha^B_D = \varepsilon_{CD}. \tag{2.4.10}$$

令

$$F_{ABjk} = \varepsilon_{AC}F^C_{Bjk}$$

$$= \frac{\partial\Gamma_{ABk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_{ABj}}{\partial x^k} + \varepsilon^{DC}(\Gamma_{DBk}\Gamma_{ACj} - \Gamma_{DBj}\Gamma_{ACk}), \tag{2.4.11}$$

其中

$$\Gamma_{ABj} = \varepsilon_{AC}\Gamma^C_{Bj}$$

适合

$$\varepsilon^{AB}\Gamma_{ABj} = 0, \tag{2.4.12}$$

其中 ε^{AB} 为由下面方程来决定

$$\varepsilon^{AB}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD} = \varepsilon_{CD}, \tag{2.4.13}$$

故必定有

$$(\varepsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.14}$$

又令

$$\varepsilon_{\bar{A}\bar{B}} = \overline{\varepsilon_{AB}}, \quad \varepsilon^{\bar{A}\bar{B}} = \overline{\varepsilon^{AB}}. \tag{2.4.15}$$

引进 Pauli 方阵 $\sigma^i = (\sigma^i_{A\bar{B}})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}$ 如下：

$$\sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.16}$$

这比通常定义的 Pauli 方阵多一个 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的因子。令

$$\sigma^{A\bar{B}}_j = \eta_{jk}\sigma^k_{C\bar{D}}\varepsilon^{CA}\varepsilon^{\bar{D}\bar{B}}, \tag{2.4.17}$$

其中 η_{jk} 的号差为-2，即

$$(\eta_{ik})=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}. \qquad (2.4.18)$$

由此可知，$\sigma_j=(\sigma_j^{AB})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}$ 为

$$\sigma_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \qquad (2.4.19)$$

任一 2 × 2 厄米 (Hermite) 方阵H能写为

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a^0+a^3 & a^1-ia^2\\ a^1+ia^2 & a^0-a^3\end{pmatrix}=a^j\sigma_j,$$

$$\det H=\frac{1}{2}\eta_{ik}a^ia^k, \qquad (2.4.20)$$

其中 a^i 为实数. 作外微分式

$$\theta^{AB}=dx^i\sigma_i^{AB},\ 或\ \theta=dx^i\sigma_i, \qquad (2.4.21)$$

其中 $\theta=(\theta^{AB})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}$.

设 $\mathfrak{A}\in SL(2,C)$，作变换

$$\tilde{\theta}=\mathfrak{A}\theta\bar{\mathfrak{A}}'=dx^i\mathfrak{A}\sigma_i\bar{\mathfrak{A}}', \qquad (2.4.22)$$

由于 $\mathfrak{A}\sigma_j\bar{\mathfrak{A}}'$ 仍然是厄米方阵，必存在实数 l_k^j 使

$$\mathfrak{A}\sigma_j\bar{\mathfrak{A}}'=l_j^k\sigma_k,$$

因此有

$$\tilde{\theta}=d\tilde{x}^i\sigma_i, \qquad (2.4.23)$$

其中

$$d\tilde{x}^i=dx^kl_k^i. \qquad (2.4.24)$$

由(2.4.20)可知

$$\frac{1}{2}\eta_{ik}d\tilde{x}^id\tilde{x}^k=\det\tilde{\theta}=\det(\mathfrak{A}\theta\bar{\mathfrak{A}}')=\det\theta=\frac{1}{2}\eta_{ik}dx^idx^k.$$

将(2.4.24)代入上式，左边可得

$$\eta_{ik} l^i_r l^k_s = \eta_{rs}, \tag{2.4.25}$$

这表示 $L = (l^i_k)$是 Lorentz 方阵，即满足

$$L'JL = J, \quad J = (\eta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

由(2.4.22)可知

$$\tilde{\theta}^{A\bar{B}} = \alpha^A_C \overline{\alpha^B_D} \theta^{C\bar{D}},$$

此即

$$(\tilde{\theta}^{1\bar{1}}, \tilde{\theta}^{1\bar{2}}, \tilde{\theta}^{2\bar{1}}, \tilde{\theta}^{2\bar{2}})' = (\mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}) \ (\theta^{1\bar{1}}, \theta^{1\bar{2}}, \theta^{2\bar{1}}, \theta^{2\bar{2}})'. \tag{2.4.26}$$

但由(2.4.21)可知

$$\begin{pmatrix} \theta^{1\bar{1}} \\ \theta^{1\bar{2}} \\ \theta^{2\bar{1}} \\ \theta^{2\bar{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^{1\bar{1}} & \sigma_1^{1\bar{1}} & \sigma_2^{1\bar{1}} & \sigma_3^{1\bar{1}} \\ \sigma_0^{1\bar{2}} & \sigma_1^{1\bar{2}} & \sigma_2^{1\bar{2}} & \sigma_3^{1\bar{2}} \\ \sigma_0^{2\bar{1}} & \sigma_1^{2\bar{1}} & \sigma_2^{2\bar{1}} & \sigma_3^{2\bar{1}} \\ \sigma_0^{2\bar{2}} & \sigma_1^{2\bar{2}} & \sigma_2^{2\bar{2}} & \sigma_3^{2\bar{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = K_0 \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix},$$

其中由(2.4.19)可知

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.4.27}$$

因此(2.4.26)能写为

$$K_0 \begin{pmatrix} d\tilde{x}^0 \\ \vdots \\ d\tilde{x}^3 \end{pmatrix} = K_0 L \begin{pmatrix} dx^0 \\ \vdots \\ dx^3 \end{pmatrix} = (\mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}) \, K_0 \begin{pmatrix} dx^0 \\ \vdots \\ dx^3 \end{pmatrix}.$$

注意 $\bar{K}_0' K_0 = I$，我们得出

$$L = \bar{K}_0' (\mathfrak{A} \times \bar{\mathfrak{A}}) K_0, \quad \det L = |\det \mathfrak{A}|^4 = 1. \tag{2.4.28}$$

注意 L 是实的，有 $\bar{L} = L$，因此上式亦可写为

$$L = K_0' (\bar{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{A}) \bar{K}_0.$$

若 $\mathfrak{A}\in SU(2)$，即 $\mathfrak{A}\in SL(2,C)$ 且有 $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'=I$，则由(2.4.27)—(2.4.28)知

$$LL'=\overline{K}_0'(\mathfrak{A}\times\overline{\mathfrak{A}})K_0\overline{K}_0'(\overline{\mathfrak{A}}'\times\mathfrak{A}')K_0$$
$$=\overline{K}_0'(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}'\times\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}')K_0=\overline{K}_0'K_0=I, \quad (2.4.29)$$

即 L 是实正交方阵.

定理 2.4.1 映照 $\varphi: SL(2,C)\to SO(1,3)$ 定义为

$$\mathfrak{A}\longmapsto L=\overline{K}_0'(\mathfrak{A}\times\overline{\mathfrak{A}})K_0,$$

这是二对一的映照，映照 φ 把 $SL(2,C)$ 中两个而仅两个不同的方阵映为同一个 $SO(1,3)$ 的方阵，但作为矩阵李群则是局部同构.

证 若把 $\mathfrak{A}$ 换为 $-\mathfrak{A}$，由(2.4.27)得知对应同一的 L，故 φ 不是群的同构. 如有 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in SL(2,C)$ 使 $\overline{K}_0'(\mathfrak{A}\times\overline{\mathfrak{A}})K_0=\overline{K}_0'(\mathfrak{B}\times\overline{\mathfrak{B}})K_0$，则有 $\mathfrak{A}\times\overline{\mathfrak{A}}=\mathfrak{B}\times\overline{\mathfrak{B}}$. 比较元素得知

$$\alpha_B^A\overline{\mathfrak{A}}=\beta_B^A\overline{\mathfrak{B}},$$

其中 $\mathfrak{A}=(\alpha_B^A)$，$\mathfrak{B}=(\beta_B^A)$，$\alpha_B^A$ 不能全为零. 如有一 $\alpha_B^A\neq 0$，则 $\beta_B^A\neq 0$. 由上式可知

$$|\alpha_B^A|^2=|\beta_B^A|^2，故有 \quad \alpha_B^A=e^{i\sigma}\beta_B^A.$$

若另有 $\beta_D^C\neq 0, \alpha_D^C=e^{i\tau}\beta_D^C$，则由 $\beta_B^A\overline{\beta_D^C}=\alpha_B^A\overline{\alpha_D^C}=e^{i\sigma}e^{-i\tau}\beta_B^A\overline{\beta_D^C}$ 知 $e^{i\tau}=e^{i\sigma}$，

故有

$$\mathfrak{A}=e^{i\sigma}\mathfrak{B}.$$

取行列式有

$$1=e^{2i\sigma},$$

故 $\sigma=k\pi$，即

$$\mathfrak{A}=\pm\mathfrak{B},$$

这证明(2.4.28)把两个、且仅两个不同 $SL(2,C)$ 映为同一 $SO(1,3)$ 的元素.

为了证明定理最后的结论，分几个步骤：

(i) $W = e^Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^n = I + Z + \cdots,$

其中 Z 是 $n \times n$ 复方阵， 把 R^{2n^2} 的原点邻域一一地映为 $GL(n,C)$ 的单位元素的邻域. 它的逆映照为

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (W - I)^n.$$

实际上，显然易见

$$\left[\frac{\partial(W_1^1, \cdots, W_n^n)}{\partial(Z_1^1, \cdots, Z_n^n)}\right]_{Z=0} = I,$$

其中 $Z = (Z_k^j)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$， $W = (W_k^j)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. 故当 Z 充分小时，即 $\operatorname{tr}(Z\bar{Z})$ 充分小时，映照 $W = e^Z$ 是一一的.

若 z 是复数，$|z|$ 充分小时有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (e^z - 1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!}\right)^n$$

$$= z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_\nu z^\nu + \cdots,$$

故同样有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (W - I)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\times \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} Z^\mu\right)^n = Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3$$

$$+ \cdots + a_\nu Z^\nu + \cdots.$$

但已知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (e^z - 1)^n = z,$$

即 $a_2 = a_3 = \cdots = a_\nu = \cdots = 0$,

由此得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(W-I)^n = Z.$$

(ii) 若 $B = e^A$, A 是充分小的 $n \times n$ 方阵,则有

$$\det B = e^{\operatorname{tr}(A)}, \text{ 即 } \det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

实际上,由

$$d\log\det B = \operatorname{tr}(B^{-1}dB) = \operatorname{tr}(e^{-A}de^A),$$

且注意,一般地

$$de^A = I + dA + \frac{1}{2}(AdA + dA\cdot A) + \cdots$$

不等于 $e^A dA$, 但是 e^A 与 A 可交换.

$$\operatorname{tr}(e^{-A}A^\mu dA\cdot A^\nu) = \operatorname{tr}(A^\nu e^{-A}A^\mu dA) = \operatorname{tr}(e^{-A}A^{\mu+\nu}dA),$$

故有

$$\operatorname{tr}(e^{-A}de^A) = \operatorname{tr}(e^{-A}e^A dA) = \operatorname{tr}(dA) = d\operatorname{tr}(A).$$

因此得出

$$d[\log\det B - \operatorname{tr}(A)] = 0,$$

即

$$\det B = e^{\operatorname{tr}(A)+C_0},$$

其中 C_0 为常数. 取 $A = 0$ 时, $\det B = 1$,故必须 $C_0 = 0$.

(iii) 如 $\mathfrak{A} \in SL(2,C)$,则在单位方阵的邻域内

$$\mathfrak{A} = e^A,$$

其中 $$A = \begin{pmatrix} \sigma^1 + i\sigma^2 & \sigma^3 + i\sigma^5 \\ \sigma^4 + i\sigma^6 & -\sigma^1 - i\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

这是由 (ii) 而得.

(iv) 如 $L \in SO(1,3)$,则在单位方阵的邻域

$$L = e^K, \quad K'J = -JK, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \\ \tau^1 & 0 & \tau^4 & \tau^5 \\ \tau^2 & -\tau^4 & 0 & \tau^6 \\ \tau^3 & -\tau^5 & -\tau^6 & 0 \end{pmatrix}.$$

实际上，对任一 $L \in SO(1,3)$ 都有

$$L^{-1} = J^{-1}L'J.$$

在单位的邻域内可写 $L = e^K$，将其代入上式

$$e^{-K} = J^{-1}e^{K'}J = e^{J^{-1}K'J},$$

据(i)，必须有 $-K = J^{-1}K'J$.

(v) 据(2.4.27)及(iii)与(iv)有

$$e^K = \bar{K}_0'(e^A \times e^{\bar{A}})K_0,$$

微分后有

$$de^K = \bar{K}_0'[de^A \times e^{\bar{A}} + e^A \times de^{\bar{A}}]K_0.$$

取 $A = 0$，对应 $K = 0$ 得出

$$dK = \bar{K}_0'(dA \times I + I \times d\bar{A})K_0,$$

此即

$$\begin{pmatrix} 0 & d\tau^1 & d\tau^2 & d\tau^3 \\ d\tau^1 & 0 & d\tau^4 & d\tau^5 \\ d\tau^2 & -d\tau^4 & 0 & d\tau^6 \\ d\tau^3 & -d\tau^5 & -d\tau^6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \bar{K}_0'\begin{pmatrix} da + d\bar{a} & d\bar{b} & db & 0 \\ d\bar{c} & da - d\bar{a} & 0 & db \\ dc & 0 & -da + d\bar{a} & db \\ 0 & dc & d\bar{c} & -da - d\bar{a} \end{pmatrix}K_0$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
0 & db+\overline{db}+dc+\overline{dc} & -i(\overline{db}-db+dc-\overline{dc}) & 2(da+\overline{da}) \\
db+\overline{db}+dc+\overline{dc} & 0 & -2i(da-\overline{da}) & dc+\overline{dc}-db-\overline{db} \\
-i(\overline{db}-db+dc-\overline{dc}) & 2i(da-\overline{da}) & 0 & i(\overline{dc}-dc-db+\overline{db}) \\
2(da+\overline{da}) & -(dc+\overline{dc}-db-\overline{db}) & -i(\overline{dc}-dc-db+\overline{db}) & 0
\end{pmatrix}.
$$

比较两边的元素可知

$$d\tau^1=\frac{db+\overline{db}+dc+\overline{dc}}{2}=d\sigma^3+d\sigma^4,$$

$$d\tau^2=\frac{-db+\overline{db}+dc-\overline{dc}}{2i}=-d\sigma^5+d\sigma^6,$$

$$d\tau^3=da+\overline{da}=2d\sigma^1,$$

$$d\tau^4=\frac{da-\overline{da}}{i}=2d\sigma^2,$$

$$d\tau^5=\frac{dc+\overline{dc}-db-\overline{db}}{2}=d\sigma^3-d\sigma^4,$$

$$d\tau^6=\frac{db-\overline{db}+dc-\overline{dc}}{2i}=d\sigma^5+d\sigma^6,$$

此即在 $\sigma^a=0$ 点

$$
(d\tau^1,\cdots,d\tau^6)=(d\sigma^1,\cdots,d\sigma^6)\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

上式右边出现的方阵是非异的，故在 $\sigma^a = 0$ 有

$$\det\left[\frac{\partial(\tau^1,\cdots,\tau^6)}{\partial(\sigma^1,\cdots,\sigma^6)}\right]_{\sigma=0} \neq 0,$$

这证明映照 φ 在单位的充分小邻域是一一对应的、实解析的，映为 $SO(1,3)$ 的单位邻域，它的逆映照 φ^{-1} 也是实解析，因此 φ 是局部同构. 定理得证.

由 (2.4.22) 可知

$$d\tilde{x}^j\sigma_j^{A\bar{B}} = dx^i\sigma_i^{C\bar{D}}\alpha_C^A\overline{\alpha_D^B}.$$

将(2.4.24)代入上式，比较 dx^i 系数有

$$l_j^k\sigma_k^{A\bar{B}} = \sigma_j^{C\bar{D}}\alpha_C^A\overline{\alpha_D^B},\text{或}\, l_k^{-1j}\sigma_{A\bar{B}}^k = \sigma_{C\bar{D}}^j\alpha_C^{-1A}\alpha_{\bar{D}}^{-1\bar{B}}, \quad (2.4.30)$$

其中 l_j^k 适合(2.4.25)，即 $L = (l_k^j)$是 Lorentz 方阵，$L^{-1} = (l_k^{-1j})$.

现设 V 中有度量

$$ds^2 = g_{jk}dx^jdx^k = \eta_{ab}\omega^a\omega^b, \quad (2.4.31)$$

其中 $\omega^a = e_j^{(a)}dx^j$ 是伪正交协变标架. (η_{ab}) 的号差为 -2. $\{\omega^a\}$ 亦称为 Lorentz 协标架.

任与 V 中 x 点的对于标架 $\{e_{(a)}^j\}$ 的向量 ξ^a，对应有

$$\xi^{A\bar{B}} = \xi^a\sigma_a^{A\bar{B}}, \quad (2.4.32)$$

据 (2.4.30) 可知这是$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$型旋量. 作$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$型旋量

$$\varepsilon_{\bar{C}\bar{D}}(\xi^{A\bar{C}}\xi^{B\bar{D}} - \xi^{B\bar{C}}\xi^{A\bar{D}}),$$

这对指标 A,B 是反称的，必等于 ε^{AB} 乘以一标量 λ，即

$$\xi^{A\bar{C}}\varepsilon_{\bar{C}\bar{D}}\xi^{B\bar{D}} - \xi^{B\bar{C}}\varepsilon_{\bar{C}\bar{D}}\xi^{A\bar{D}} = \lambda\varepsilon^{AB}. \quad (2.4.33)$$

应用(2.4.9)于上式得知

$$2(\det\xi)\varepsilon^{AB} = \lambda\varepsilon^{AB},$$

其中 $\xi = (\xi^{A\bar{B}})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}$. 由 (2.4.20) 可知

$$\det\xi = \det(\xi^a\sigma_a) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}\xi^0+\xi^3 & \xi^1-i\xi^2\\ \xi^1+i\xi^2 & \xi^0-\xi^3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{ab}\xi^a\xi^b,$$

我们得出 $\lambda = \eta_{jk}\xi^j\xi^k$. 用(2.4.32)代入(2.4.33)得

$$\xi^a\xi^b(\sigma_a^{A\bar{C}}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}\sigma_b^{B\bar{D}} - \sigma_b^{B\bar{C}}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}\sigma_a^{A\bar{D}}) = \eta_{ab}\xi^a\xi^b\epsilon^{AB}.$$

比较 $\xi^a\xi^b$ 的系数得出

$$\sigma_a^{A\bar{C}}\sigma^B_{b\bar{C}} + \sigma_b^{A\bar{C}}\sigma^B_{a\bar{C}} = \eta_{ab}\epsilon^{AB}. \tag{2.4.34}$$

用 ϵ_{DB} 乘上式得出

$$\sigma_a^{A\bar{C}}\sigma_{bD\bar{C}} + \sigma_b^{A\bar{C}}\sigma_{aD\bar{C}} = \eta_{ab}\delta^A_D. \tag{2.4.35}$$

特别是令 $A = D$ 时有

$$\sigma_a^{A\bar{C}}\sigma^b_{A\bar{C}} = \delta^b_a \quad 或者\quad \mathrm{tr}(\sigma^b\sigma_a) = \delta^b_a. \tag{2.4.36}$$

由此可知,若乘(2.4.32)两边以 $\sigma^b_{A\bar{B}}$，有

$$\xi^b = \sigma^b_{A\bar{B}}\xi^{A\bar{B}}. \tag{2.4.37}$$

注意(2.4.32)定义的旋量是厄米的,即 $\overline{\xi^{A\bar{B}}} = \xi^{B\bar{A}}$,反之,任与 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$型旋量，由(2.4.37)定义的向量 ξ^b 为实，当且仅当 $\xi^{A\bar{B}}$ 为厄米的旋量. 更一般地,给与 V 中的对于 Lorentz 标架的 r 阶逆变、s 阶协变张量 $T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$，对应有

$$T^{A_1\cdots A_r\ \bar{B}_1\cdots\bar{B}_r}_{C_1\cdots C_s\bar{D}_1\cdots\bar{D}_s} = T^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\sigma_{a_1}^{A_1\bar{B}_1}\cdots\sigma_{a_r}^{A_r\bar{B}_r}\sigma^{b_1}_{C_1\bar{D}_1}\cdots\sigma^{b_s}_{C_s\bar{D}_s}, \tag{2.4.38}$$

这是$\begin{pmatrix}r & r\\ s & s\end{pmatrix}$型旋量,满足

$$\overline{T^{A_1\cdots A_r\bar{B}_1\cdots\bar{B}_r}_{C_1\cdots C_s\bar{D}_1\cdots\bar{D}_s}} = T^{B_1\cdots B_r\bar{A}_1\cdots\bar{A}_r}_{D_1\cdots D_s\bar{C}_1\cdots\bar{C}_s}$$

即是厄米旋量. 特别是 η^{ab} 所对应的厄米旋量为

$$\eta^{ab}\sigma_a^{A\bar{B}}\sigma_b^{C\bar{D}} = \sigma_a^{A\bar{B}}\eta^{ab}\sigma_b^{C\bar{D}}.$$

据次序 $(A,\bar{B})=(1,\bar{1}),(1,\bar{2}),(2,\bar{1}),(2,\bar{2})$ 排列成 4×4 方阵有

$$(\sigma_a^{A\bar{B}}\eta^{ab}\sigma_b^{C\bar{D}})=K_0JK_0'$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon^{AB})\times(\varepsilon^{\bar{C}\bar{D}}),$$

故有

$$\eta^{ab}\sigma_a^{A\bar{B}}\sigma_b^{C\bar{D}}=\varepsilon^{AC}\varepsilon^{\bar{B}\bar{D}}\ \text{或者}\ \sigma_b^{A\bar{B}}\sigma_{C\bar{D}}^{b}=\delta_C^A\delta_{\bar{D}}^{\bar{B}}. \tag{2.4.39}$$

对于旋量联络 Γ_j，令

$$\Gamma_a=\Gamma_je_{(a)}^j, \tag{2.4.40}$$

于是有

$$F_{ab}=F_{jk}e_{(a)}^je_{(b)}^k=X_a\Gamma_b-X_b\Gamma_a+[\Gamma_a,\Gamma_b]-E_{ab}^c\Gamma_c, \tag{2.4.41}$$

其中 $X_a=e_{(a)}^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$,

$$E_{ab}^c=\left(e_{(a)}^j\frac{\partial e_{(b)}^k}{\partial x^j}-e_{(b)}^j\frac{\partial e_{(a)}^k}{\partial x^j}\right)e_k^{(c)}. \tag{2.4.42}$$

于是杨氏方程

$$g^{kl}F_{jk;l}=0,$$

$$F_{jk;l}=\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^l}-F_{jk}\Gamma_l+\Gamma_lF_{jk}-F_{kr}\begin{Bmatrix}r\\jl\end{Bmatrix}-F_{jr}\begin{Bmatrix}r\\kl\end{Bmatrix} \tag{2.4.43}$$

可写为

$$\eta^{bc}F_{ab;c}=0,\ F_{ab;c}=X_cF_{ab}-F_{db}\gamma_{ac}^d-F_{ab}\Gamma_c+\Gamma_cF_{ab}-F_{ad}\gamma_{bc}^d=F_{jk;l}e_{(a)}^je_{(b)}^ke_{(c)}^l, \tag{2.4.44}$$

其中

$$\gamma^{a}_{bc} = e^{(a)}_{i} X_{c} e^{j}_{(b)} + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} e^{(a)}_{j} e^{k}_{(b)} e^{l}_{(c)}. \tag{2.4.45}$$

(参阅 § 1.4.)

据定理 1.7.1 与 2.4.1 可知，给与 $SO(1,3)$ 型联络 Γ^{a}_{bj} 应对应有 $SL(2,C)$ 型联络，但是按定理 1.7.1 的方法构造后者的联络比较复杂，我们将另外证明.

定理 2.4.2 设给与 $SO(1,3)$ 型联络 Γ^{a}_{bj}，则

$$\Gamma^{A}_{Bj} = \frac{1}{2}\Gamma^{a}_{bj}\sigma^{A\bar{C}}_{a}\sigma^{b}_{B\bar{C}} \tag{2.4.46}$$

是 $SL(2,C)$ 型联络.

证 由

$$\tilde{\Gamma}^{a}_{bj} = \left(\Gamma^{c}_{dk} l^{a}_{c} l^{-1d}_{b} - l^{-1c}_{b}\frac{\partial l^{a}_{c}}{\partial x^{k}}\right)\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{j}},$$

得知

$$\tilde{\Gamma}^{A}_{Bj} = \tilde{\Gamma}^{a}_{bj}\sigma^{A\bar{C}}_{a}\sigma^{b}_{B\bar{C}} = \frac{1}{2}\Big[\Gamma^{c}_{dk} l^{a}_{c}\sigma^{A\bar{C}}_{a} l^{-1d}_{b}\sigma^{b}_{B\bar{C}}$$

$$- (l^{-1c}_{b}\sigma^{b}_{B\bar{C}})\frac{\partial(l^{a}_{c}\sigma^{A\bar{C}}_{a})}{\partial x^{k}}\Big]\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{j}}.$$

应用(2.4.30)得出

$$\tilde{\Gamma}^{A}_{Bj} = \frac{1}{2}\Big[\Gamma^{c}_{dk}\sigma^{D\bar{E}}_{c}\alpha^{A}_{D}\overline{\alpha^{C}_{E}}\sigma^{d}_{F\bar{G}}\alpha^{-1F}_{B}\overline{\alpha^{-1G}_{C}}$$

$$- \sigma^{c}_{D\bar{E}}\alpha^{-1D}_{B}\overline{\alpha^{-1E}_{C}}\frac{\partial(\sigma^{F\bar{G}}_{c}\alpha^{A}_{F}\alpha^{C}_{G})}{\partial x^{k}}\Big]\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{j}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\Gamma^{c}_{dk}\sigma^{D\bar{E}}_{c}\sigma^{d}_{F\bar{E}}\alpha^{A}_{D}\alpha^{-1F}_{B} - \alpha^{-1F}_{B}\overline{\alpha^{-1G}_{C}}\Big(\frac{\partial\alpha^{A}_{F}}{\partial x^{k}}\bar{\alpha}^{C}_{G}$$

$$+ \alpha^{A}_{F}\frac{\partial\bar{\alpha}^{C}_{G}}{\partial x^{k}}\Big)\Big]\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{j}}$$

$$= \left[\Gamma^D_{F\,k} \alpha^A_D \alpha^{-1F}_{\ \ B} - \alpha^{-1F}_{\ \ B} \frac{\partial \alpha^A_F}{\partial x^k} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \delta^A_B \, \alpha^{-1G}_C \frac{\partial \alpha^C_G}{\partial x^k} \right] \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}.$$

由于

$$\alpha^{-1G}_C \frac{\partial \alpha^C_G}{\partial x^k} = \frac{\partial \log \det(\alpha^A_B)}{\partial x^k} = 0,$$

由上式得出

$$\tilde{\Gamma}^A_{Bj} = \left(\Gamma^D_{Fk} \alpha^A_D \alpha^{-1F}_{\ \ B} - \alpha^{-1F}_{\ \ B} \frac{\partial \alpha^A_F}{\partial x^k} \right) \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}, \qquad (2.4.47)$$

这证明 Γ^A_{Bj} 是 $SL(2,C)$ 型联络.

据上面的定理,我们可以具体构造 $SL(2,C)$ 型联络. 任意给与 V 中的可微分张量场 $h_{jk} = h_{kj}$ 是非异的, 作相应的 Christoffel 符号

$$\left\{ {i \atop kl} \right\}^{\dagger} = \frac{1}{2} h^{ir} \left(\frac{\partial h_{kr}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{lr}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^r} \right), \qquad (2.4.48)$$

已知这是一线性联络. 据(1.4.11),有

$$B^a_{bj} = \frac{\partial e^k_{(b)}}{\partial x^{kj}} e^{(a)}_k + \left\{ {k \atop lj} \right\}^{\dagger} e^l_{(b)} e^{(a)}_k \qquad (2.4.49)$$

是 $O(1,3)$ 型联络. 我们要求它是 $SO(1,3)$,就要求

$$B^a_{aj} = \frac{\partial \log |\det(e^k_{(a)})|}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log |\det(h_{kl})|}{\partial x^j} = 0.$$

$$(2.4.50)$$

由于 $g_{jk} = \eta_{ab} e^{(a)}_j e^{(b)}_k$, 于是

$$|\det(e^k_{(a)})| = |\det(e^{(a)}_j)|^{-1} = |\det(g_{jk})|^{-\frac{1}{2}},$$

(2.4.50) 即

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\log\left|\frac{\det(h_{kl})}{\det(g_{kl})}\right| = 0,$$

即要求

$$\det(h_{kl}) = C_0\det(g_{kl}), \tag{2.4.51}$$

其中 C_0 为常数.

假定 h_{kl} 满足条件(2.4.51),于是 B^a_{bj} 是 $SO(1,3)$ 联络,据定理 2.4.2,有

$$\omega^A_{Bj} = \frac{1}{2}B^a_{bj}\sigma^{A\bar{C}}_a\sigma^b_{B\bar{C}} \tag{2.4.52}$$

是 $SL(2,C)$ 型联络,其中 B^a_{bj} 由(2.4.49)定义.

§ 2.5 Yang-Mills 场

规范 (gauge) 的名称是由 H. Weyl[5] 在 1918 年考虑引力-电磁统一场论时所引进的,他考虑的是 $U(1)$ 规范场,而 $U(1)$ 是交换群. 对非交换群的规范场的研究是 Yang-Mills[9] 于 1954 年始的,他们研究的是行列式为 1 的 2×2 酉方阵所成的群 $SU(2)$. 1956 年 Utiyama[4] 推广到一般的矩阵李群的规范场. 由于规范场与联络有对应的关系[10],故可以定义一般李群的规范场. 本节将讨论最早的非交换群 $SU(2)$ 规范场,又称为 Yang-Mills 场.

设 V 是 R^4 的开集,Γ^A_{Bj} 是 $SU(2)$ 型联络. 由于 $SU(2)$ 是 $SL(2,C)$ 的李子群,必须有

$$\Gamma^A_{Aj} = 0. \tag{2.5.1}$$

此外,如 $\mathfrak{A}$ 是在 $SU(2)$ 的单位充分小邻域中,能写 $\mathfrak{A} = e^H$. 由于 $\mathfrak{A}^{-1} = e^{-H} = \bar{\mathfrak{A}}' = e^{\bar{H}'}$, 可见 $\bar{H}' = -H$, 即 H 是反厄米. 反之,如果 H 是反厄米的, 则 $\mathfrak{A} = e^H$ 是酉方阵. 若 $\mathrm{tr}(H) = 0$,则 $\det\mathfrak{A} = 1$. 以迹为零的反厄米方阵 H 的元素为

参数，可写为

$$H=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t^3 & t^1-it^2 \\ t^1+it^2 & -t^3 \end{pmatrix}=it^\alpha\sigma_\alpha, \qquad (2.5.2)$$

其中 $\sigma_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 是(2.4.19)定义的 Pauli 方阵. 本节的希腊字母指标 $\alpha,\beta,\cdots=1,2,3$. 由此可知

$$\left[\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t^\alpha}\right]_{t=0}=\left[\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(I+H+\frac{1}{2!}H^2+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n!}H^n+\cdots\right)\right]_{t=0}=\left[\frac{\partial H}{\partial t^\alpha}\right]_{t=0}=i\sigma_\alpha$$

这表示 $i\sigma_\alpha$ 是 $SU(2)$ 的李代数 $su(2)$的自然基. $i\sigma_\alpha$ 是反厄米方阵，因此必须有

$$\overline{\Gamma^A_{Bj}}=-\Gamma^B_{Ai}. \qquad (2.5.3)$$

令

$$\omega^{AB}=i\sigma^{AB}_\alpha dt^\alpha \text{ 或 } \omega=i\sigma_\alpha dt^\alpha, \qquad (2.5.4)$$

其中 $\omega=(\omega^{AB})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}$ 是反厄米方阵.

对任一 $\mathfrak{A}\in SU(2)$，作变换

$$\tilde{\omega}=\mathfrak{A}\omega\bar{\mathfrak{A}}'. \qquad (2.5.5)$$

$\tilde{\omega}$ 仍然是迹为 0 的反厄米的方阵，因此上式可写为 $\tilde{\omega}=i\sigma_\alpha d\tilde{t}^\alpha$

$$i\sigma_\alpha d\tilde{t}^\alpha=i\mathfrak{A}\sigma_\alpha\bar{\mathfrak{A}}'dt^\alpha. \qquad (2.5.6)$$

反厄米方阵 $i\mathfrak{A}\sigma_\alpha\bar{\mathfrak{A}}'$ 同样可写为 $i\sigma_\alpha$ 的线性组合，设为

$$\mathfrak{A}\sigma_\alpha\bar{\mathfrak{A}}'=C^\beta_\alpha\sigma_\beta, \qquad (2.5.7)$$

以之代入(2.5.6)，由于 σ_α 是线性独立的，比较 σ_α 的系数得

$$d\tilde{t}^\alpha=C^\alpha_\beta dt^\beta. \qquad (2.5.8)$$

另一方面，由(2.5.5)知 $\det\tilde{\omega}=\det\omega$，此即

$$d\tilde{t}^\alpha d\tilde{t}^\alpha=dt^\alpha dt^\alpha,$$

因此(2.5.8)是正交变换，即 $C=(C^\alpha_\beta)$ 是 3×3 实正交方阵. 如令 $\mathfrak{A}=(u^A_B)$，则(2.5.7)可写为

$$c^\beta_\alpha\sigma^{AB}_\beta=\sigma^{C\bar{D}}_\alpha u^A_C\overline{u^B_D}. \qquad (2.5.9)$$

又(2.5.5)即

$$\tilde{\omega}^{A\bar{B}} = u_C^A \overline{u_D^B} \omega^{C\bar{D}}.$$

注意 $\mathrm{tr}(\tilde{\omega}) = 0$，即 $\tilde{\omega}^{2\bar{2}} = -\tilde{\omega}^{1\bar{1}}$，我们可把上式写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}^{1\bar{1}} \\ \tilde{\omega}^{1\bar{2}} \\ \tilde{\omega}^{2\bar{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1\overline{u_1^1} - u_2^1\overline{u_2^1} & u_1^1\overline{u_2^1} & u_2^1\overline{u_1^1} \\ u_1^1\overline{u_1^2} - u_2^1\overline{u_2^2} & u_1^1\overline{u_2^2} & u_2^1\overline{u_1^2} \\ u_1^2\overline{u_1^1} - u_2^2\overline{u_2^1} & u_1^2\overline{u_2^1} & u_2^2\overline{u_1^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{1\bar{1}} \\ \omega^{1\bar{2}} \\ \omega^{2\bar{1}} \end{pmatrix}$$

$$= \Psi(\mathfrak{A}) \begin{pmatrix} \omega^{1\bar{1}} \\ \omega^{1\bar{2}} \\ \omega^{2\bar{1}} \end{pmatrix},$$

此即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{t}^1 \\ d\tilde{t}^2 \\ d\tilde{t}^3 \end{pmatrix} = \Psi(\mathfrak{A}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt^1 \\ dt^2 \\ dt^3 \end{pmatrix}.$$

用(2.5.8)代入上式可得出

$$C = K_1^{-1}\Psi(\mathfrak{A})K_1, \tag{2.5.10}$$

其中

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(\mathfrak{A}) = \begin{pmatrix} u_1^1\overline{u_1^1} - u_2^1\overline{u_2^1} & u_1^1\overline{u_2^1} & u_2^1\overline{u_1^1} \\ u_1^1\overline{u_1^2} - u_2^1\overline{u_2^2} & u_1^1\overline{u_2^2} & u_2^1\overline{u_1^2} \\ u_1^2\overline{u_1^1} - u_2^2\overline{u_2^1} & u_1^2\overline{u_2^1} & u_2^2\overline{u_1^1} \end{pmatrix}, \tag{2.5.11}$$

这里 $\Psi(\mathfrak{A})$ 是一个 $SU(2)$ 的表示，即

$$\Psi(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \Psi(\mathfrak{A})\Psi(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in SU(2). \tag{2.5.12}$$

(2.5.10)是把 $SU(2)$ 映入 $SO(3)$ 的同态，显然把 $\mathfrak{A}$ 与 $-\mathfrak{A}$ 映为同一的正交方阵． 但可如定理 2.4.1 一样证明这是矩阵李

群的局部同构.

给与 $SO(3)$ 型联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta j}$，可以如 § 2.4 一样证明

$$\Gamma^{A}_{Bj}=\frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}_{\beta j}\sigma^{A\bar{C}}_{\alpha}\sigma^{\beta}_{B\bar{C}} \tag{2.5.13}$$

是 $SU(2)$ 型联络. 有时我们写

$$\Gamma_j=(\Gamma^{\alpha}_{\beta j})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant3}, \tag{2.5.14}$$

它满足

$$\Gamma'_j=-\Gamma_j. \tag{2.5.15}$$

规范场

$$F_{jk}=\frac{\partial\Gamma_k}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_j}{\partial x^k}+[\Gamma_j,\Gamma_k], \tag{2.5.16}$$

而 Yang-Mills 方程为

$$g^{kl}F_{jk;l}=0. \tag{2.5.17}$$

我们取 $g^{kl}=\eta^{kl}$，号差为-2，并且取

$$\Gamma_j=\varphi_j S, \tag{2.5.18}$$

其中 $\varphi_j=\varphi_j(x)$ 是可微分函数，

$$S=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix} \tag{2.5.19}$$

是实的反对称常数方阵，则(2.5.16)，(2.5.17)化为

$$\begin{cases}F_{jk}=\left(\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x^j}-\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x^k}\right)S=f_{jk}S,\ f_{jk}=\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x^k}-\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x^j},\\ \eta^{kl}F_{jk;l}=\eta^{kl}\dfrac{\partial f_{jk}}{\partial x^l}S=0.\end{cases}$$

如 S 不为 0，则 f_{jk} 满足普通的 Maxwell 方程

$$\eta^{lk}\frac{\partial f_{jk}}{\partial x^l}=0. \tag{2.5.20}$$

在 §2.2，我们知道有静态球对称解

$$
\begin{cases}
\varphi_0 = \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \eta \displaystyle\int_0^{x^1} \frac{x^3 du}{[u^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{3/2}}, \\
\varphi_3 = -\eta \displaystyle\int_0^{x^1} \frac{x^2 du}{[u^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{3/2}}, \quad f_{0i} = 0, \\
f_{\alpha\beta} = \eta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \dfrac{x^\gamma}{r^3},
\end{cases} \tag{2.5.21}
$$

这是吴-杨（Wu-Yang[8]）解．故吴-杨解是磁单极解．

实际上，我们证明了任与常数的 3×3 实反称方阵 S，当 φ_i 是电磁势时，由(2.5.18)定义的 $SU(2)$ 规范势 $\Gamma_i = \varphi_i S$ 满足 Yang-Mills 方程．因此，凡是 Maxwell 方程的解，相应有 Yang-Mills 方程的解，故可以构造许多 Yang-Mills 方程的解．

值得注意的是，上面的方法不但对 $SU(2)$ 规范场可用，而且对于一般的矩阵李群 G 的规范场亦可用．因为(1.3.9)可写为

$$
F_{jk} = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^k} + [\Gamma_j, \Gamma_k],
$$

其中

$$
F_{jk} = (F^\alpha_{\beta jk})_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant N}, \quad \Gamma_j = (\Gamma^\alpha_{\beta j})_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant N}.
$$

我们取

$$
\Gamma_i = \varphi_i \sigma^a T_a,
$$

T_a 是李代数的自然基，其中 σ^a 为常数，不全为零，$\varphi_i(x)$是可微分函数，则杨氏方程(1.3.9)亦即

$$
g^{lk} F_{jk;l} = 0
$$

化为

$$
g^{lk} f_{jk;l} = 0, \quad f_{ik} = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \right),
$$

特别是，当 $g^{ik} = \eta^{ik}$ 时，任一规范群为 G 的规范场，都有磁单极解．

参 考 文 献

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Y. S. Tyupkin, Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills Equations, *Phy. Letters,* **59B**, 85(1975).

[2] W. Drechsler and M. E. Mayer, Fibre bundle techniques in Gauge theories, Berlin, Springer (1977).

[3] L. Synge, Relativity, the Special Theory, 2d ed. Amsterdam, North-Holland Pub. Co.(1964).

[4] R. Utiyama, Invariant theoretical interpretation of intersection, *Phys. Rev*, **101**, 597 (1956).

[5] H. Weyl, Gravitation and Elektrizitat, Sper. Preus. Akad. Wiss., 565 (1918).

[6] H. Weyl, Classical Groups, Princeton math. series, No. 1, (1964).

[7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge, The University press (1956).

[8] T. T. Wu and C. N. Yang, Properties of matter under unusual conditions, eds. H. Mark and Fernback (1969).

[9] C. N. Yang and R. L. Mills, Conservation of isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.* **96**, 197(1954).

[10] 陆启铿，规范场与主纤维丛上的联络，物理学报，**23**，249 (1974).

第三章 旋量分析

§ 3.1 常用张量的旋量形式

设 V 是 R^4 的开集，有度量

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = \eta_{ab}\omega^a\omega^b, \tag{3.1.1}$$

其中 (η_{ab}) 的号差为 -2，而 $\omega^a = e_j^{(a)}dx^j$ 是伪正交协标架. 由于 Christoffel 符号 $\left\{ {i \atop kl} \right\}$ 定义了一线性联络，据 (1.4.11) 与 (1.4.12)

$$\Gamma^a_{bk} = \frac{\partial e^j_{(b)}}{\partial x^k} e_j^{(a)} + \left\{ {l \atop jk} \right\} e^j_{(b)} e_l^{(a)} \tag{3.1.2}$$

定义了 $SO(1,3)$ 的联络，而

$$\Gamma^a_{ak} = \frac{\partial \log |\det\ e^j_{(b)}|}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log |g|}{\partial x^k} = 0, \tag{3.1.3}$$

因为 $|\det(e^j_{(b)})|^2 = |\det(g^{jk})| = |g|^{-1}$; 此外，由 $\eta_{ab,k} = 0$ 可知

$$\eta_{cb}\Gamma^c_{ak} + \eta_{ac}\Gamma^c_{bk} = 0. \tag{3.1.4}$$

据定理 2.4.2 可知

$$\Gamma^A_{Bj} = \frac{1}{2}\Gamma^a_{bj}\sigma_a^{A\bar{C}}\sigma^b_{B\bar{C}} \tag{3.1.5}$$

是 $SL(2,C)$ 型联络，它满足于

$$\Gamma^A_{Aj} = 0 \text{ 及 } \epsilon_{AC}\Gamma^C_{Bj} = \epsilon_{BC}\Gamma^C_{Aj}. \tag{3.1.6}$$

实际上，由(3.1.5)可知

$$\epsilon_{AC}\Gamma^{C}_{Bj}=\frac{1}{2}\Gamma^{a}_{bj}\eta_{ad}\sigma^{d}_{A\bar{D}}\epsilon^{\bar{D}\bar{E}}\sigma^{b}{}_{B\bar{E}},$$

而(3.1.6)的第二式可由(3.1.4)推得. 此外还有

$$\epsilon_{AB;j}=0,\tag{3.1.7}$$

这是因为据(3.1.6)

$$\epsilon_{AB;j}=\frac{\partial\epsilon_{AB}}{\partial x^{j}}-\epsilon_{CB}\Gamma^{C}_{Aj}-\epsilon_{AC}\Gamma^{C}_{Bj}=0.$$

为方便起见，令

$$\Gamma_{abj}=\eta_{ac}\Gamma^{c}_{bj},\Gamma_{ABj}=\epsilon_{AC}\Gamma^{C}_{Bj}=\frac{1}{2}\Gamma_{abj}\sigma^{a\bar{C}}_{A}\sigma^{b}_{B\bar{C}},\tag{3.1.8}$$

于是(3.1.4)和(3.1.6)便可写为

$$\Gamma_{abj}+\Gamma_{baj}=0,\ \Gamma_{ABj}=\Gamma_{BAj}.\tag{3.1.9}$$

现在我们首先来证明旋量运算中十分有用的定理.

定理 3.1.1 设 $F_{A\bar{C}B\bar{D}}$ 是厄米旋量,即

$\overline{F_{A\bar{C}B\bar{D}}}=F_{C\bar{A}D\bar{B}},$

且满足

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}}=-F_{B\bar{D}A\bar{C}},$$

则有

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}}=\Phi_{AB}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}+\epsilon_{AB}\Phi_{\bar{C}\bar{D}},$$

其中

$$\Phi_{AB}=\Phi_{BA}=\frac{1}{2}F_{A\cdot B\bar{C}}^{\ \bar{C}},\Phi_{\bar{C}\bar{D}}=\overline{\Phi_{CD}}.$$

证 首先证明对任一旋量 $F_{A\bar{C}B\bar{D}}$

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}}-F_{B\bar{C}A\bar{D}}=\epsilon_{AB}F^{E}{}_{\bar{C}E\bar{D}}.\tag{3.1.10}$$

实际上,当 $A=B$ 时，上式显然成立;当 $A=1,B=2$ 时

$$F_{1\bar{C}2\bar{D}}-F_{2\bar{C}1\bar{D}}=\epsilon^{EF}F_{E\bar{C}F\bar{D}}=F^{F}{}_{\bar{C}F\bar{D}},$$

这证明了(3.1.10).

现在据假定

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}} = \frac{1}{2}(F_{A\bar{C}B\bar{D}} - F_{B\bar{D}A\bar{C}})$$

$$= \frac{1}{2}(F_{A\bar{C}B\bar{D}} - F_{B\bar{C}A\bar{D}}) + \frac{1}{2}(F_{B\bar{C}A\bar{D}} - F_{B\bar{D}A\bar{C}})$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_{AB}F^{E}{}_{\bar{C}E\bar{D}} + \frac{1}{2}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}F_{B\cdot A\bar{B}}^{\bar{B}}, \tag{3.1.11}$$

由于

$$\Phi_{BA} = \frac{1}{2}F_{B\cdot A\bar{D}}^{\bar{D}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\bar{C}\bar{D}}F_{B\bar{C}A\bar{D}}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^{\bar{D}\bar{C}}F_{A\bar{D}B\bar{C}} = \Phi_{BA}$$

及

$$\Phi_{\bar{C}\bar{D}} = \frac{1}{2}F^{\bar{F}}_{\bar{C}F\bar{D}} = \frac{1}{2}\epsilon^{EF}F_{E\bar{C}F\bar{D}} = \frac{1}{2}\overline{\epsilon^{\bar{E}\bar{F}}F_{C\bar{E}D\bar{F}}} = \overline{\Phi_{CD}},$$

用上式代入(1.3.11)便证明了定理。

定理 3.1.2

$$\overline{\delta^{\bar{B}}_{\bar{F}}}\Gamma^{A}_{Ej} + \delta^{A}_{E}\overline{\Gamma^{B}_{Fj}} = \Gamma^{a}_{bj}\sigma_{a}^{A\bar{B}}\sigma^{b}_{E\bar{F}} \tag{3.1.12}$$

证 把上式指标降低，有

$$\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}\Gamma_{ABj} + \epsilon_{AB}\overline{\Gamma_{CDj}} = \Gamma_{abj}\sigma^{b}_{A\bar{C}}\sigma^{a}_{B\bar{D}}. \tag{3.1.13}$$

要证明上式，令

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}j} = \Gamma_{abj}\sigma^{a}_{A\bar{C}}\sigma^{b}_{B\bar{D}},$$

据(3.1.9)，有

$$F_{B\bar{D}A\bar{C}j} = -F_{A\bar{C}B\bar{D}j}.$$

对每一固定的 i 应用定理 3.1.1 得知

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}j} = \epsilon_{\bar{C}\bar{D}}\Phi_{ABj} + \epsilon_{AB}\overline{\Phi_{CDj}},$$

其中

$$\Phi_{ABj} = \frac{1}{2}F_{A\cdot B\bar{D}j}^{\bar{D}} = \frac{1}{2}\Gamma_{abj}\sigma_{A}^{a\bar{D}}\sigma^{b}_{B\bar{D}} = \Gamma_{ABj},$$

这里应用了(3.1.8)，定理得证.

用 $\sigma_a^{E\bar{F}}$ 乘(3.1.12)得出

$$\sigma_a^{E\bar{B}}\Gamma_{Ej}^{A} + \sigma_a^{A\bar{F}}\overline{\Gamma_{Fj}^{B}}$$
$$= \Gamma_{bj}^{c}\sigma_c^{A\bar{B}}\sigma_{E\bar{F}}^{b}\sigma_a^{E\bar{F}} = \Gamma_{aj}^{c}\sigma_c^{A\bar{B}},$$

这里应用了 (2.4.36). 由 (2.4.30) 可知

$$\sigma_b^{A\bar{B}} = l_b^{-1a}\alpha_C^A\overline{\alpha_D^B}\sigma_a^{C\bar{D}},$$

即 $\sigma_k^{A\bar{B}}$ 是一张量，它的协变微分为

$$\sigma_{a;j}^{A\bar{B}} = \frac{\partial}{\partial x^j}\sigma_a^{A\bar{B}} - \sigma_c^{A\bar{B}}\Gamma_{aj}^{c} + \sigma_a^{E\bar{B}}\Gamma_{Ej}^{A} + \sigma_a^{A\bar{F}}\overline{\Gamma_{Fj}^{B}},$$

这证明了

$$\sigma_{a;j}^{A\bar{B}} = 0. \tag{3.1.14}$$

黎曼曲率张量所对应的旋量为

$$R_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = R_{abcd}\sigma_{A\bar{E}}^{a}\sigma_{B\bar{F}}^{b}\sigma_{C\bar{G}}^{c}\sigma_{D\bar{H}}^{d}, \tag{3.1.15}$$

据(1.3.12)可知

$$R_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = -R_{B\bar{F}A\bar{E}C\bar{G}D\bar{H}}$$
$$= -R_{A\bar{E}B\bar{F}D\bar{H}C\bar{G}} = R_{C\bar{G}D\bar{H}A\bar{E}B\bar{F}},$$

因此应用定理 3.1.1 两次可得

$$R_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = \chi_{ABCD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\overline{\chi_{EFGH}}$$
$$+ \varphi_{AB\bar{G}\bar{H}}\epsilon_{CD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}} + \overline{\varphi_{EF\bar{C}\bar{D}}}\,\epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}}, \tag{3.1.16}$$

其中

$$\chi_{ABCD} = \frac{1}{4}R_{A\cdot B\bar{E}C\cdot D\bar{F}}^{\ \bar{E}\ \ \ \ \bar{F}}, \quad \varphi_{AB\bar{G}\bar{H}} = \frac{1}{4}R_{A\cdot B\bar{B}\cdot\bar{G}C\bar{H}}^{\ \bar{B}\ \ \ C} \tag{3.1.17}$$

满足

$$\chi_{ABCD} = \chi_{BACD} = \chi_{ABDC} = \overline{\chi_{CDAB}},$$
$$\varphi_{AB\bar{E}\bar{F}} = \varphi_{BA\bar{E}\bar{F}} = \varphi_{AB\bar{F}\bar{E}} = \overline{\varphi_{EF\bar{A}\bar{B}}}. \tag{3.1.18}$$

Ricci 张量的旋量形式为

$$R_{B\bar{F}D\bar{H}} = \eta^{ac}R_{abcd}\sigma_{B\bar{F}}^{b}\sigma_{D\bar{H}}^{d},$$

由(2.4.36)得知

$$\eta^{ac} = \epsilon^{AC}\epsilon^{\bar{B}\bar{G}}\sigma^{a}_{A\bar{B}}\sigma^{c}_{C\bar{G}},$$

因此有

$$R_{B\bar{F}D\bar{H}} = \epsilon^{AC}\epsilon^{\bar{E}\bar{G}}R_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}}$$

$$= \chi^{C}_{BCD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}} + \overline{\chi^{E}_{FEH}}\epsilon_{BD} - 2\varphi_{BD\bar{F}\bar{H}}.$$

由于

$$\chi^{C}_{BCD} = \epsilon^{AC}\chi_{ABCD} = \epsilon^{AC}\chi_{CDAB} = -\chi^{C}_{DCB},$$

即对指标 B 与 D 是反称的，因此有

$$\chi^{C}_{BCD} = \frac{1}{2}\chi^{AC}{}_{AC}\epsilon_{BD}.$$

利用(1.3.13)可以证明 $\lambda = \chi^{AC}{}_{AC}$ 为实，故有

$$R_{B\bar{F}D\bar{H}} = \lambda\epsilon_{BD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}} - 2\varphi_{BD\bar{F}\bar{H}}. \tag{3.1.20}$$

同理，Weyl 张量的旋量形式为

$$C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = C_{abcd}\sigma^{a}_{A\bar{E}}\sigma^{b}_{B\bar{F}}\sigma^{c}_{C\bar{G}}\sigma^{d}_{D\bar{H}}$$

$$= \Psi_{ABCD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}} + \Phi_{AB\bar{G}\bar{H}}\epsilon_{CD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}$$

$$+ \overline{\Phi_{EF\bar{C}\bar{D}}}\epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}} + \overline{\Psi_{EFGH}}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}, \tag{3.1.21}$$

其中

$$\Psi_{ABCD} = \frac{1}{4}C_{A}{}^{\bar{E}}{}_{B\bar{E}C}{}^{\bar{F}}{}_{D\bar{F}},\quad \Phi_{AB\bar{G}\bar{H}} = \frac{1}{4}C_{A}{}^{\bar{E}}{}_{B\bar{E}}{}^{C}{}_{\bar{G}C\bar{H}}, \tag{3.1.22}$$

满足

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{BACD} = \Psi_{ABDC} = \Psi_{DCAB},$$

$$\Phi_{AB\bar{G}\bar{H}} = \Phi_{BA\bar{G}\bar{H}} = \Phi_{AB\bar{H}\bar{G}} = \overline{\Phi_{GH\bar{A}\bar{B}}}. \tag{3.1.23}$$

而 Weyl 张量的并缩的旋量

$$C_{B\bar{F}D\bar{H}} = \eta^{ac}C_{abcd}\sigma^{b}_{B\bar{F}}\sigma^{d}_{D\bar{H}} = \epsilon^{AC}\epsilon^{\bar{E}\bar{G}}C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}}$$

$$= \Psi^{C}_{BCD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}} + \overline{\Psi^{E}_{FEH}}\epsilon_{BD} - 2\Phi_{BD\bar{F}\bar{H}}$$

$$= \mu\epsilon_{BD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}} - 2\Phi_{BD\bar{F}\bar{H}},\quad \mu = \frac{1}{2}\Psi^{AC}{}_{AC}.$$

但据(1.3.31)可知上式为零，故得

$$\mu\epsilon_{BD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}} = 2\Phi_{BD\bar{F}\bar{H}}.$$

但上式左边对指标 B,D 是对称的，右边是反称的，必须

$$\mu = 0 \text{ 及 } \Phi_{BD\bar{F}\bar{H}} = 0.$$

由(3.1.23)可知

$$\Psi_{ABCD}\epsilon^{BC} = \Psi_{DCBA}\epsilon^{BC} = -\Psi_{DBCA}\epsilon^{BC},$$

即对指标 A,D 反称，因此有

$$\Psi_{ABCD}\epsilon^{BC} = \mu\epsilon_{AD} = 0,$$

这证明了 Ψ_{ABCD} 对指标 B,C 是对称的，因而对所有指标皆是对称的，综上所证，有

定理 3.1.3 Weyl 旋量可写为

$$C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = \Psi_{ABCD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}} + \overline{\Psi_{EFGH}}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}, \tag{3.1.24}$$

其中

$$\Psi_{ABCD} = \frac{1}{4}C_{A\cdot\,B\bar{E}C\cdot\,D\bar{F}}^{\;\;\bar{E}\qquad\;\bar{F}}, \tag{3.1.25}$$

对所有指标 A,B,C,D 是对称的。

令

$$\epsilon_{A_1\bar{B}_1A_2\bar{B}_2A_3\bar{B}_3A_4\bar{B}_4} = \epsilon_{a_1a_2a_3a_4}\sigma^{a_1}_{A_1\bar{B}_1}\sigma^{a_2}_{A_2\bar{B}_2}\sigma^{a_3}_{A_3\bar{B}_3}\sigma^{a_4}_{A_4\bar{B}_4}, \tag{3.1.26}$$

这旋量的指标组 $(A_1\bar{B}_1),(A_2\bar{B}_2),(A_3\bar{B}_3),(A_4\bar{B}_4)$ 有两组相同为 0，任两组交换差一负号，而旋量

$$\epsilon_{A_1A_3}\epsilon_{A_2A_4}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_4}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_3} - \epsilon_{A_1A_4}\epsilon_{A_2A_3}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_3}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_4}, \tag{3.1.27}$$

可以利恒等式 $\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} = 0$ 证明亦有此性质，因此这两旋量差一因子．由于

$$\epsilon_{1\bar{1}1\bar{2}2\bar{1}2\bar{2}} = \begin{vmatrix} \sigma^0_{1\bar{1}} & \sigma^0_{1\bar{2}} & \sigma^0_{2\bar{1}} & \sigma^0_{2\bar{2}} \\ \sigma^1_{1\bar{1}} & \sigma^1_{1\bar{2}} & \sigma^1_{2\bar{1}} & \sigma^1_{2\bar{2}} \\ \sigma^2_{1\bar{1}} & \sigma^2_{1\bar{2}} & \sigma^2_{2\bar{1}} & \sigma^2_{2\bar{2}} \\ \sigma^3_{1\bar{1}} & \sigma^3_{1\bar{2}} & \sigma^3_{2\bar{1}} & \sigma^3_{2\bar{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \times \frac{1}{4} = i,$$

而

$$\epsilon_{12}\epsilon_{12}\epsilon_{\bar{1}\bar{2}}\epsilon_{\bar{2}\bar{1}}-\epsilon_{12}\epsilon_{12}\epsilon_{\bar{1}\bar{1}}\epsilon_{\bar{2}\bar{2}}=-1,$$

因此有

$$\begin{aligned}&\epsilon_{A_1\bar{B}_1A_2\bar{B}_2A_3\bar{B}_3A_4\bar{B}_4}\\&=-i(\epsilon_{A_1A_3}\epsilon_{A_2A_4}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_4}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_3}-\epsilon_{A_1A_4}\epsilon_{A_2A_3}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_3}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_4}).\end{aligned}\tag{3.1.28}$$

设 $F_{ab}=-F_{ba}$ 是反称张量，据定理 3.1.3 有

$$F_{A\bar{C}B\bar{D}}=F_{jk}\sigma^j_{A\bar{C}}\sigma^k_{B\bar{D}}=\Phi_{AB}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}+\overline{\Phi_{CD}}\epsilon_{AB}.\tag{3.1.29}$$

令

$$\begin{aligned}F^*_{A_1\bar{B}_1A_2\bar{B}_2}&=\frac{1}{2}\epsilon_{a_1a_2a_3a_4}F^{a_3a_4}\sigma^{a_1}_{A_1\bar{B}_1}\sigma^{a_2}_{A_2\bar{B}_2}\\&=\frac{1}{2}\epsilon_{A_1\bar{B}_1A_2\bar{B}_2A_3\bar{B}_3A_4\bar{B}_4}F^{A_3\bar{B}_3A_4\bar{B}_4}\\&=-\frac{i}{2}(\epsilon_{A_1A_3}\epsilon_{A_2A_4}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_4}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_3}-\epsilon_{A_1A_4}\epsilon_{A_2A_3}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_3}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_4})\\&\quad\times\epsilon^{C_3A_3}\epsilon^{C_4A_4}\epsilon^{\bar{D}_3\bar{B}_3}\epsilon^{\bar{D}_4\bar{B}_4}F_{C_3\bar{D}_3C_4\bar{D}_4}\\&=-\frac{i}{2}(\delta^{C_3}_{A_1}\delta^{C_4}_{A_2}\overline{\delta^{D_4}_{B_1}}\,\overline{\delta^{D_3}_{B_2}}-\delta^{C_4}_{A_1}\delta^{C_3}_{A_2}\overline{\delta^{D_3}_{B_1}}\,\overline{\delta^{D_4}_{B_2}})\\&\quad\times(\Phi_{C_3C_4}\epsilon_{\bar{D}_3\bar{D}_4}+\overline{\Phi_{D_3D_4}}\epsilon_{C_3C_4})\\&=-\frac{i}{2}(\Phi_{A_1A_2}\epsilon_{\bar{B}_2\bar{B}_1}-\Phi_{A_2A_1}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_2}+\overline{\Phi_{B_2B_1}}\epsilon_{A_1A_2}\\&\quad-\overline{\Phi_{B_1B_2}}\epsilon_{A_2A_1})\\&=i(\Phi_{A_1A_2}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_2}-\overline{\Phi_{B_1B_2}}\epsilon_{A_1A_2}),\end{aligned}$$

因此若写

$$F^*_{A_1\bar{B}_1A_2\bar{B}_2}=\Phi^*_{A_1A_2}\epsilon_{\bar{B}_1\bar{B}_2}+\overline{\Phi^*_{B_1B_2}}\epsilon_{A_1A_2},\tag{3.1.30}$$

则有

$$\Phi^*_{AB}=i\Phi_{AB}.\tag{3.1.31}$$

令

$$F_{A\bar{C}B\bar{D};E\bar{F}} \doteq F_{A\bar{C}B\bar{D};a}\sigma^a_{E\bar{F}} = F_{A\bar{C}B\bar{D},j}e^j_{(a)}\sigma^a_{E\bar{F}}$$
$$= \Phi_{AB;E\bar{F}}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}} + \overline{\Phi_{CD,F\bar{E}}}\epsilon_{AB},$$

据(3.1.14)及(3.1.19)可知

$$\eta^{bc}F_{ab,c}\sigma^a_{A\bar{C}} = \epsilon^{BE}\epsilon^{\bar{D}\bar{F}}F_{A\bar{C}B\bar{D},E\bar{F}}$$
$$= \epsilon^{BE}\epsilon^{\bar{D}\bar{F}}(\Phi_{AB,E\bar{F}}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}} + \overline{\Phi_{CD,F\bar{E}}}\epsilon_{AB})$$
$$= -\Phi^E_{A,E\bar{C}} - \overline{\Phi^F_{C,F\bar{A}}}.$$

同理

$$\eta^{bc}F^*_{ab,c}\sigma^a_{E\bar{F}} = -\Phi^{*E}_{A,E\bar{C}} - \overline{\Phi^{*F}_{C,F\bar{A}}}$$
$$= -i(\Phi^E_{A,E\bar{C}} - \overline{\Phi^F_{C,F\bar{A}}}),$$

因此，Maxwell 方程

$$\eta^{bc}F_{ab,c} = 0,\quad \eta^{bc}F^*_{ab,c} = 0$$

化为

$$\epsilon^{BE}\Phi_{AB,E\bar{C}} = 0, \tag{3.1.32}$$

这就是旋量形式的 Maxwell 方程。

有兴趣的是，(3.1.5) 定义了一个 $SL(2,C)$ 型联络，由(2.4.7)可定义曲率张量

$$F^A_{Bjk} = \frac{\partial \Gamma^A_{Bk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^A_{Bj}}{\partial x^k} + \Gamma^A_{Cj}\Gamma^C_{Bk} - \Gamma^A_{Ck}\Gamma^C_{Bj}, \tag{3.1.33}$$

化为旋量的形式便是

$$F_{ABC\bar{E}D\bar{F}} = \epsilon_{AG}F^G_{Bjk}e^j_{(a)}e^k_{(b)}\sigma^a_{C\bar{E}}\sigma^b_{D\bar{F}}. \tag{3.1.34}$$

此旋量与黎曼曲率张量对应的旋量(3.1.15)有何关系？我们有

定理 3.1.4

$$F_{ABC\bar{E}D\bar{F}} = \chi_{ABCD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}} + \varphi_{AB\bar{E}\bar{F}}\epsilon_{CD},$$

其中 χ_{ABCD} 与 $\varphi_{AB\bar{E}\bar{F}}$ 可由(3.1.17)定义。

证 任与旋量 ξ^A 我们有 Ricci 恒等式(1.3.7)：

$$\xi^A_{;jk} - \xi^A_{;kj} = -\xi^B F^A_{Bjk},$$

于是

$$(\xi^A\overline{\xi^B})_{,jk}-(\xi^A\overline{\xi^B})_{,kj}=-\xi^C\overline{\xi^B}F^A_{Cjk}-\xi^A\overline{\xi^C F^B_{Cjk}}.$$

另一方面，存在实的向量 ξ^a 使得 $\xi^A\overline{\xi^B}=\xi^a\sigma_a^{AB}$，于是

$$[(\xi^A\overline{\xi^B})_{,jk}-(\xi^A\overline{\xi^B})_{,kj}]=\sigma_a^{AB}(\xi^a_{;jk}-\xi^a_{;kj})$$
$$=-\xi^b R^a_{bjk}\sigma_a^{AB},$$

其中

$$\xi^a=\xi^A\overline{\xi^B}\sigma^a_{AB}.$$

我们得

$$(\xi^C\overline{\xi^B}F^A_{Cjk}+\xi^A\overline{\xi^C F^B_{Cjk}})=\xi^b R^a_{bjk}\sigma_a^{AB},$$

化为旋量的形式即为

$$\xi^C\overline{\xi^B}F^A_{CD\bar{F}E\bar{G}}+\xi^A\overline{\xi^C F^B_{CF\bar{D}G\bar{E}}}=\xi^C\overline{\xi^H}R^{AB}_{C\bar{H}D\bar{F}E\bar{G}}.$$

把 A,B 指标降低并用(3.1.16)，有

$$\xi^C\overline{\xi}_B F_{ACD\bar{F}E\bar{G}}+\xi_A\overline{\xi^C F_{BCF\bar{D}G\bar{E}}}=\xi^C\overline{\xi^H}R_{A\bar{B}C\bar{H}D\bar{F}E\bar{G}}$$
$$=\xi^C\overline{\xi^H}(\chi_{ACDE}\epsilon_{\bar{B}\bar{H}}\epsilon_{\bar{F}\bar{G}}+\varphi_{AC\bar{F}\bar{G}}\epsilon_{DE}\epsilon_{\bar{B}\bar{H}}$$
$$+\overline{\chi_{BHFG}}\epsilon_{AC}\epsilon_{DE}+\overline{\varphi_{BH\bar{D}\bar{E}}}\epsilon_{AC}\epsilon_{\bar{F}\bar{G}}),$$

两边乘以 $\epsilon^{\bar{F}\bar{G}}$ 便得

$$\frac{1}{2}(\xi^C\overline{\xi}_B F_{ACD}{}^{\bar{G}}{}_{\cdot E\bar{G}}+\xi_A\overline{\xi^C F_{BC}{}^{G}{}_{\cdot \bar{D}G\bar{E}}})$$

$$=\xi^C\overline{\xi}_B\chi_{ACDE}+\xi_A\overline{\xi^H\varphi_{BH\bar{D}\bar{E}}},$$

或者

$$\left[\left(\chi_{ACDE}-\frac{1}{2}F_{ACD}{}^{\bar{G}}{}_{\cdot E\bar{G}}\right)\epsilon_{\bar{B}\bar{H}}+\left(\overline{\varphi_{BH\bar{D}\bar{E}}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\overline{F_{BH}{}^{G}{}_{\cdot\bar{D}G\bar{E}}}\right)\epsilon_{AC}\right]\times\xi^C\overline{\xi^H}=0,$$

对任意之 ξ^C. 因此，有

$$\epsilon_{\bar{B}\bar{H}}\left(\chi_{ACDE}-\frac{1}{2}F_{ACD}{}^{\bar{G}}{}_{\cdot E\bar{G}}\right)+\left(\overline{\varphi_{BH\bar{D}\bar{E}}}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\overline{F_{BH\cdot\bar{D}G\bar{E}}^{\ \ \ G}}\Big)\epsilon_{AC}=0.$$

注意 $F_{ACD}{}^{\bar{G}}{}_{E\bar{G}}$ 对指标 A,C 可由 (3.1.34), (3.1.33), (3.1.6)得知是对称的，因此乘以 ϵ^{AC} 便得出

$$\varphi_{BH\bar{D}\bar{E}}=\frac{1}{2}F_{BH\cdot\bar{D}G\bar{E}}^{\ \ \ G}.$$

同理有

$$\chi_{ACDE}=\frac{1}{2}F_{ACD}{}^{\bar{G}}{}_{E\bar{G}}.$$

但根据定理 3.1.1

$$F_{ACD\bar{G}E\bar{H}}=\frac{1}{2}F_{ACD\cdot E\bar{K}}^{\ \ \ \ \bar{K}}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}}+\frac{1}{2}F_{AC\cdot GK\bar{H}}^{\ \ \ K}\epsilon_{DE},$$

这证明了定理.

令

$$\Gamma_{ABj}=\epsilon_{AC}\Gamma^{C}_{Bj},\ \Gamma_{ABC\bar{D}}=\Gamma_{ABj}e^{j}_{(a)}\sigma^{a}_{C\bar{D}},\tag{3.1.35}$$

由此可知，(3.1.33) 可写为

$$F_{ABC\bar{E}D\bar{F}}=-X_{D\bar{F}}\Gamma_{ABC\bar{E}}+X_{C\bar{E}}\Gamma_{ABD\bar{F}}+\Gamma_{AGC\bar{E}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HBD\bar{F}}$$
$$-\Gamma_{AGD\bar{F}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HBC\bar{E}}-\Gamma_{ABk}\left(e^{j}_{(a)}\frac{\partial e^{k}_{(b)}}{\partial x^{j}}-e^{j}_{(b)}\frac{\partial e^{k}_{(a)}}{\partial x^{j}}\right)\sigma^{a}_{C\bar{E}}\sigma^{b}_{D\bar{F}},$$
$$\tag{3.1.36}$$

其中

$$X_{AB}=\sigma^{a}_{A\bar{B}}e^{j}_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^{j}}.\tag{3.1.37}$$

由 (3.1.2) 可知

$$e^{k}_{(a)}\frac{\partial e^{j}_{(b)}}{\partial x^{k}}-e^{k}_{(b)}\frac{\partial e^{j}_{(a)}}{\partial x^{k}}=e^{j}_{(c)}(\Gamma^{c}_{bk}e^{k}_{(a)}-\Gamma^{c}_{ak}e^{k}_{(b)}),$$

两边乘以 $\sigma^{a}_{C\bar{E}}\sigma^{b}_{D\bar{F}}\Gamma_{ABj}$，得出

$$\Gamma_{ABj}\left(e^k_{(a)}\frac{\partial e^j_{(b)}}{\partial x^k}-e^k_{(b)}\frac{\partial e^j_{(a)}}{\partial x^k}\right)\sigma^a_{C\bar{E}}\sigma^b_{D\bar{F}}$$

$$=\Gamma_{ABj}e^j_{(c)}\sigma^c_{G\bar{H}}\sigma_d{}^{G\bar{H}}(\Gamma^d_{bj}e^j_{(a)}-\Gamma^d_{aj}e^j_{(b)})\sigma^a_{C\bar{E}}\sigma^b_{D\bar{F}}$$

$$=\Gamma_{ABG\bar{H}}[(\delta^{\bar{H}}_{\bar{F}}\Gamma^G_{Dj}+\delta^G_D\overline{\Gamma^H_{Fj}})e^j_{(a)}\sigma^a_{C\bar{E}}$$

$$-(\delta^{\bar{H}}_{\bar{E}}\Gamma^G_{Cj}+\delta^G_C\overline{\Gamma^H_{Ej}})e^j_{(a)}\sigma^a_{D\bar{F}}]$$

$$=\Gamma_{ABG\bar{F}}\Gamma^G_{DC\bar{E}}-\Gamma_{ABG\bar{E}}\Gamma^G_{CD\bar{F}}+\Gamma_{ABD\bar{H}}\overline{\Gamma^H_{FEC}}$$

$$-\Gamma_{ABC\bar{H}}\overline{\Gamma^H_{EFD}},\tag{3.1.38}$$

以之代入(3.1.36)得到

$$F_{ABC\bar{E}D\bar{F}}=-X_{D\bar{F}}\Gamma_{ABC\bar{E}}+X_{C\bar{E}}\Gamma_{ABD\bar{F}}+\Gamma_{AGC\bar{E}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HBD\bar{F}}$$

$$-\Gamma_{AGD\bar{F}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HBC\bar{E}}+\Gamma_{ABG\bar{E}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HCD\bar{F}}-\Gamma_{ABG\bar{F}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HDC\bar{E}}$$

$$+\Gamma_{ABC\bar{H}}\epsilon^{\bar{G}\bar{H}}\overline{\Gamma_{GEFD}}-\Gamma_{ABD\bar{H}}\epsilon^{\bar{G}\bar{H}}\overline{\Gamma_{GFEC}}.\tag{3.1.39}$$

应用定理 3.1.4 于上式左边有

$$-X_{D\bar{F}}\Gamma_{ABC\bar{E}}+X_{C\bar{E}}\Gamma_{ABD\bar{F}}$$

$$=-\Gamma_{AGC\bar{E}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HBD\bar{F}}+\Gamma_{AGD\bar{F}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HBC\bar{E}}-\Gamma_{ABG\bar{E}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HCD\bar{F}}$$

$$+\Gamma_{ABG\bar{F}}\epsilon^{HG}\Gamma_{HDC\bar{E}}-\Gamma_{ABC\bar{H}}\epsilon^{\bar{G}\bar{H}}\overline{\Gamma_{GEFD}}$$

$$+\Gamma_{ABD\bar{H}}\epsilon^{\bar{G}\bar{H}}\overline{\Gamma_{GFEC}}+\chi_{ABCD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}+\varphi_{AB\bar{E}\bar{F}}\epsilon_{CD}.\tag{3.1.40}$$

据 Bianchi 恒等式(2.1.18)

$$\eta^{df}R^*_{abcd;f}=0$$

可写为旋量的形式，即

$$\epsilon^{DI}\epsilon^{\bar{H}\bar{J}}R^*_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H};I\bar{J}}=0\tag{3.1.41}$$

其中$(\ )_{;A\bar{B}}=(\ )_{;j}e^j_{(a)}\sigma^a_{A\bar{B}}$. 应用(3.1.30)及(3.1.31)，视 A,E,B,F 为固定，则有

$$R^*_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}}=i(\chi_{ABCD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}}-\overline{\chi_{EFGH}}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}$$

$$-\varphi_{AB\bar{G}\bar{H}}\epsilon_{CD}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}+\overline{\varphi_{EF\bar{C}\bar{D}}}\epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{G}\bar{H}}),$$

以之代入(3.1.41)得知

$$-\epsilon^{DI}\chi_{ABCD;I\bar{G}}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}+\epsilon^{\bar{H}\bar{J}}\overline{\chi_{EFGH;CJ}}\epsilon_{AB}$$

$$+\epsilon^{\bar{H}\bar{J}}\varphi_{AB\bar{G}\bar{H};C\bar{J}}\epsilon_{\bar{E}\bar{F}}-\epsilon^{DI}\overline{\varphi_{EF\bar{C}\bar{D};I\bar{G}}}\epsilon_{AB}=0.$$

用 $\epsilon^{\bar{E}\bar{F}}$ 乘上式得出 Bianchi 恒等式的旋量形式

$$\epsilon^{DI}\chi_{ABCD|I\bar{G}} = \epsilon^{\bar{H}J}\varphi_{AB\bar{G}\bar{H}|CJ}. \tag{3.1.42}$$

§3.2 Weyl 旋量的分类

由上节定理 3.1.3 可知，Weyl 张量的旋量形式是由旋量 Ψ_{ABCD} 所决定的，后者对所有指标是对称的. 分类 Weyl 张量 C_{abcd} 即选取适当的伪正交标架使之化为标准的形式，这相当于对应的 Weyl 旋量作 $SL(2,C)$ 的变换化为标准型. 由此可知，可以把旋量 Ψ_{ABCD} 在 $SL(2,C)$ 下的分类作为 Weyl 旋量的分类. 然后把 Ψ_{ABCD} 排列成适当方阵，看每一类方阵的 Jordan 标准型是什么.

令 $Z^A(A=1,2)$ 是两个复的变量，而令

$$\varphi(Z^1,Z^2) = \Psi_{ABCD}Z^AZ^BZ^CZ^D \tag{3.2.1}$$

为 4 次齐次多项式. 令

$$t = Z^1/Z^2,$$

则

$$\begin{aligned}\varphi &= (Z^2)^4(\Psi_{1111}t^4 + 4\Psi_{1112}t^3 + 6\Psi_{1122}t^2 \\ &\quad + 4\Psi_{1222}t + \Psi_{2222}) \\ &= \lambda(t+a_1)(t+a_2)(t+a_3)(t+a_4),\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中 a_1,a_2,a_3,a_4 是上面 4 次多项式的 4 个根，包括无穷大根. 若写

$$a_1 = \alpha_2/\alpha_1,\ a_2 = \beta_2/\beta_1,\ a_3 = \gamma_2/\gamma_1,\ a_4 = \delta_2/\delta_1, \tag{3.2.3}$$

则

$$\begin{aligned}\varphi &= \kappa\alpha_A Z^A\beta_B Z^B\gamma_C Z^C\delta_D Z^D \\ &= \mu\alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}Z^AZ^BZ^CZ^D,\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

其中

$$\alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)} = \frac{1}{4!}(\alpha_A\beta_B\gamma_C\delta_D + \alpha_A\beta_B\gamma_D\delta_C + \cdots$$

$$+\alpha_D\beta_C\gamma_B\delta_A), \tag{3.2.5}$$

即对 $\alpha_A\beta_B\gamma_C\delta_D$ 的指标作所有可能的排列然后相加除以 24. 注意 $Z^A,\alpha_A,\beta_A,\gamma_A,\delta_A$ 分别换为 $\rho Z^A,\lambda_1\alpha_A,\lambda_2\beta_A,\lambda_3\gamma_A,\lambda_4\delta_A$ 并不影响(3.2.2)的根,只要 $\rho,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 不为零. 因此,每一个根,例如 a_1,可看作是包括无穷大点的复平面上的一点,而 α_A 可看作是此点的齐次坐标. 由此可知,每一旋量 Ψ_{ABCD} 对应有闭复平面上的 4 点,其齐次坐标分别为 $\alpha_A,\beta_A,\gamma_A,\delta_A$. 根据此 4 点的位置,自然地得到 Weyl 旋量的分类:

I 型: 4 点彼此不同,用符号 [1111] 表示.

II 型: 有而只有两点重合,用 [211] 表示.

III 型: 有三点重合但不等于其它一点,用 [31] 表示.

D 型: 两点两点重合但彼此不等,用 [22] 表示.

N 型: 4 点重合,用[4]表示.

O 型: $\Psi_{ABCD}=0$,用[—]表示.

此 4 点重合的可能的过程可用下面的图形来表示,称为 Penrose[1] 图:

$$\begin{array}{ccccc} & & [1111] & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ & [211] & \to & [22] & \\ \swarrow & & \swarrow & \downarrow & \\ [31] & \longrightarrow & [4] & \to & [-] \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{I} & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ & \mathrm{II} & \to & \mathrm{D} & \\ \swarrow & & \swarrow & \downarrow & \\ \mathrm{III} & \to & \mathrm{N} & \to & \mathrm{O} \end{array} \tag{3.2.6}$$

Petrov[3] 最初是分类真空引力场(即 $R_{jk}=0$)的黎曼曲率张量. 此时据定理 2.1.3, $C_{abcd}=R_{abcd}$, 因此我们不如分类 Weyl 张量. Petrov 的分类是把 $C^{ab}{}_{cd}$ 排列成 6×6 方阵,而以 $SO(1,3)$ 的变换下分类再化之为 Jordan 标准型. 为了说明两种分类的关系,我们把 Ψ_{ABCD} 的两个指标上升, $\Psi^{AB}{}_{CD}=\epsilon^{EA}\epsilon^{FB}\Psi_{EFCD}$, 而考虑 $SL(2,C)$ 的变换下, 3×3 方阵

$$
\Psi=\begin{pmatrix}\Psi^{11}_{11} & \Psi^{11}_{12} & \Psi^{11}_{22}\\ 2\Psi^{12}_{11} & 2\Psi^{12}_{12} & 2\Psi^{12}_{22}\\ \Psi^{22}_{11} & \Psi^{22}_{12} & \Psi^{22}_{22}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{1111} & \Psi_{1112} & \Psi_{1122}\\ \Psi_{1211} & \Psi_{1212} & \Psi_{1222}\\ \Psi_{2211} & \Psi_{2212} & \Psi_{2222}\end{pmatrix} \tag{3.2.7}
$$

的分类.

首先注意，作 $\mathfrak{A}=(\alpha^A_B)\in SL(2,C)$ 的变换时，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}^{AB}_{CD}=\alpha^A_E\alpha^B_F\Psi^{EF}_{GH}\overset{-1}{\alpha}{}^G_C\overset{-1}{\alpha}{}^H_D\\
=\;&\alpha^A_1\alpha^B_1\Psi^{11}_{GH}\overset{-1}{\alpha}{}^G_C\overset{-1}{\alpha}{}^H_D+(\alpha^A_1\alpha^B_2+\alpha^A_2\alpha^B_1)\Psi^{12}_{GH}\overset{-1}{\alpha}{}^G_C\overset{-1}{\alpha}{}^H_D\\
&+\alpha^A_2\alpha^B_2\Psi^{22}_{GH}\overset{-1}{\alpha}{}^G_C\overset{-1}{\alpha}{}^H_D\\
=\;&\alpha^A_1\alpha^B_1[\Psi^{11}_{11}\overset{-1}{\alpha}{}^1_C\overset{-1}{\alpha}{}^1_D+\Psi^{11}_{12}(\overset{-1}{\alpha}{}^1_C\overset{-1}{\alpha}{}^2_D+\overset{-1}{\alpha}{}^2_C\overset{-1}{\alpha}{}^1_D)\\
&+\Psi^{11}_{22}\overset{-1}{\alpha}{}^2_C\overset{-1}{\alpha}{}^D_2]+(\alpha^A_1\alpha^B_2+\alpha^A_2\alpha^B_1)[\Psi^{12}_{11}\overset{-1}{\alpha}{}^1_C\overset{-1}{\alpha}{}^1_D\\
&+\Psi^{12}_{12}(\overset{-1}{\alpha}{}^1_C\overset{-1}{\alpha}{}^2_D+\overset{-1}{\alpha}{}^2_C\overset{-1}{\alpha}{}^1_D)+\Psi^{12}_{22}\overset{-1}{\alpha}{}^2_C\overset{-1}{\alpha}{}^2_D]\\
&+\alpha^A_2\alpha^B_2[\Psi^{22}_{11}\overset{-1}{\alpha}{}^1_C\overset{-1}{\alpha}{}^1_D+\Psi^{22}_{12}(\overset{-1}{\alpha}{}^1_C\overset{-1}{\alpha}{}^2_D+\overset{-1}{\alpha}{}^2_C\overset{-1}{\alpha}{}^1_D)\\
&+\Psi^{22}_{22}\overset{-1}{\alpha}{}^2_C\overset{-1}{\alpha}{}^2_D],
\end{aligned}
$$

写为矩阵的形式即

$$
\tilde{\Psi}=\begin{pmatrix}\tilde{\Psi}^{11}_{11} & \tilde{\Psi}^{11}_{12} & \tilde{\Psi}^{11}_{22}\\ 2\tilde{\Psi}^{12}_{11} & 2\tilde{\Psi}^{12}_{12} & 2\tilde{\Psi}^{12}_{22}\\ \tilde{\Psi}^{22}_{11} & \tilde{\Psi}^{22}_{12} & \tilde{\Psi}^{22}_{22}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\alpha^1_1\alpha^1_1 & \alpha^1_1\alpha^1_2 & \alpha^1_2\alpha^1_2\\ 2\alpha^1_1\alpha^2_1 & \alpha^1_1\alpha^2_2+\alpha^1_2\alpha^2_1 & 2\alpha^1_2\alpha^2_2\\ \alpha^2_1\alpha^2_1 & \alpha^2_1\alpha^2_2 & \alpha^2_2\alpha^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi^{11}_{11} & \Psi^{11}_{12} & \Psi^{11}_{22}\\ 2\Psi^{12}_{11} & 2\Psi^{12}_{12} & 2\Psi^{12}_{22}\\ \Psi^{22}_{11} & \Psi^{22}_{12} & \Psi^{22}_{22}\end{pmatrix}
$$

$$
\times\begin{pmatrix}\overset{-1}{\alpha}{}^1_1\overset{-1}{\alpha}{}^1_1 & \overset{-1}{\alpha}{}^1_1\overset{-1}{\alpha}{}^1_2 & \overset{-1}{\alpha}{}^1_2\overset{-1}{\alpha}{}^1_2\\ 2\overset{-1}{\alpha}{}^1_1\overset{-1}{\alpha}{}^2_1 & \overset{-1}{\alpha}{}^1_1\overset{-1}{\alpha}{}^2_2+\overset{-1}{\alpha}{}^1_2\overset{-1}{\alpha}{}^2_1 & 2\overset{-1}{\alpha}{}^1_2\overset{-1}{\alpha}{}^2_2\\ \overset{-1}{\alpha}{}^2_1\overset{-1}{\alpha}{}^2_1 & \overset{-1}{\alpha}{}^2_1\overset{-1}{\alpha}{}^2_2 & \overset{-1}{\alpha}{}^2_2\overset{-1}{\alpha}{}^2_2\end{pmatrix}. \tag{3.2.8}
$$

令 $SO(3,C)$ 为 3×3 复方阵并且行列式为 1 的方阵所成

的群．我们首先证明

定理 3.2.1 令

$$\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})=\begin{pmatrix}\alpha_1^1\alpha_1^1 & \alpha_1^1\alpha_2^1 & \alpha_2^1\alpha_2^1\\ 2\alpha_1^1\alpha_1^2 & \alpha_1^1\alpha_2^2+\alpha_2^1\alpha_1^2 & 2\alpha_2^1\alpha_2^2\\ \alpha_1^2\alpha_1^2 & \alpha_1^2\alpha_2^2 & \alpha_2^2\alpha_2^2\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}=(\alpha_B^A)\in SL(2,C)$$

则 $\mathscr{R}_S:SL(2,C)\to GL(3,C)$ 是一同态，此外，若令 $\mathscr{R}_{K_1}(\mathfrak{A})=K_1^{-1}\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})K_1$，其中

$$K_1=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ 0 & 0 & -2\\ -1 & -i & 0\end{pmatrix}, \tag{3.2.9}$$

则 $\mathscr{R}_{K_1}:SL(2,C)\to SO(3,C)$ 是局部同构．

证 令 Φ 是 2×2 对称复方阵，它可写为

$$\Phi=\begin{pmatrix}t^1-it^2 & -t^3\\ -t^3 & -t^1-it^2\end{pmatrix},$$

其中 t^1,t^2,t^3 为复数．令 $\tilde{\Phi}=\mathfrak{A}\Phi\mathfrak{A}',\mathfrak{A}\in SL(2,C)$，写

$$\tilde{\Phi}=\begin{pmatrix}\tilde{t}^1-i\tilde{t}^2 & -\tilde{t}^3\\ -\tilde{t}^3 & -\tilde{t}^1-i\tilde{t}^2\end{pmatrix},$$

则 $\tilde{t}^\alpha(\alpha=1,2,3)$ 可写为 t^α 的线性组合，设为

$$\tilde{t}^\alpha=a_\beta^\alpha t^\beta, \tag{3.2.10}$$

由于 $\det\tilde{\Phi}=\det\Phi$，此即

$$\tilde{t}^\alpha\tilde{t}^\alpha=t^\alpha t^\alpha,$$

故(3.2.10)是复正交变换．如令 $A=(a_\beta^\alpha)$，有

$$AA'=I.$$

把变换 $\tilde{\Phi}=\mathfrak{A}\Phi\mathfrak{A}'$ 排列成向量变换的形式有

$$\begin{pmatrix}\tilde{t}^1-i\tilde{t}^2\\ -2\tilde{t}^3\\ -\tilde{t}^1-i\tilde{t}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^1\alpha_1^1 & \alpha_1^1\alpha_2^1 & \alpha_2^1\alpha_2^1\\ 2\alpha_1^1\alpha_1^2 & \alpha_1^1\alpha_2^2+\alpha_2^1\alpha_1^2 & 2\alpha_2^1\alpha_2^2\\ \alpha_1^2\alpha_1^2 & \alpha_1^2\alpha_2^2 & \alpha_2^2\alpha_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^1-it^2\\ -2t^3\\ -t^1-it^2\end{pmatrix},$$

此即

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}^1 - i\tilde{t}^2 \\ -2\tilde{t}^3 \\ -\tilde{t}^1 - i\tilde{t}^2 \end{pmatrix} = \mathscr{R}_S(\mathfrak{A}) \begin{pmatrix} t^1 - it^2 \\ -2t^3 \\ -t^1 - it^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.2.11)$$

如再作变换 $\tilde{\tilde{\Phi}} = \mathfrak{B}\tilde{\Phi}\mathfrak{B}', \mathfrak{B} \in SL(2,C)$ 知

$$\tilde{\tilde{\Phi}} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\Phi\mathfrak{A}')\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\Phi(\mathfrak{B}\mathfrak{A})',$$

此即

$$(\tilde{\tilde{t}}^1 - i\tilde{\tilde{t}}^2, -2\tilde{\tilde{t}}^3, -\tilde{\tilde{t}}^1 - i\tilde{\tilde{t}}^2)' = \mathscr{R}_S(\mathfrak{B}\mathfrak{A})(t^1 - it^2,$$
$$-2t^3, -t^1 - it^2)' = \mathscr{R}_S(\mathfrak{B})\,(\tilde{t}^1 - i\tilde{t}^2, -2\tilde{t}^3, -\tilde{t}^1 - i\tilde{t}^2)'$$
$$= \mathscr{R}_S(\mathfrak{B})\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})(t^1 - it^2, -2t^3, -t' - it^2)'.$$

上式即

$$\mathscr{R}_S(\mathfrak{B}\mathfrak{A})K_1(t^1, t^2, t^3)' = \mathscr{R}_S(\mathfrak{B})\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})K_1(t^1, t^2, t^3)',$$

对任意的(t^1, t^2, t^3),因此有

$$\mathscr{R}_S(\mathfrak{B}\mathfrak{A})K_1 = \mathscr{R}_S(\mathfrak{B})\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})K_1,$$

故有 $\mathscr{R}_S(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \mathscr{R}_S(\mathfrak{B})\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})$,即 $\mathscr{R}_S: SL(2,C) \to GL(3,C)$ 是一同态. 此处，当 $\alpha_1^2 = 0$ 时显然易见 $\det\mathscr{R}_S(\mathfrak{A}) = (\det\mathfrak{A})^3$，但必存在 $\mathfrak{B}$ 使 $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ 的第 2 行第 1 列元素为零，因此 $\det\mathscr{R}_S(\mathfrak{A}) = \det\mathscr{R}_S(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}) = \det(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^3$，这证明 $\det\mathscr{R}_S(\mathfrak{A}) = 1$.

由(3.2.11)可知

$$(\tilde{t}^1, \tilde{t}^2, \tilde{t}^3)' = K_1^{-1}\mathscr{R}_S(\mathfrak{A})K_1(t^1, t^2, t^3)'$$
$$= \mathscr{R}_{K_1}(\mathfrak{A})(t^1, t^2, t^3)'.$$

据(3.2.10)，$\mathscr{R}_{K_1}(\mathfrak{A}) = A = (a^\alpha_\beta)$ 是复正交方阵，故 $\mathscr{R}_{K_1}: SL(2, C) \to SO(3, C)$ 是一同态. 如定理 2.4.1 一样可证其为局部同构. 定理得证.

据此定理,(3.2.8)可写为

$$\tilde{\Psi} = \mathscr{R}_S(\mathfrak{A})\Psi\mathscr{R}_S^{-1}(\mathfrak{A}). \qquad (3.2.12)$$

由(3.2.1)与(3.2.4)可知

$$\Psi_{ABCD} = \kappa\alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}, \qquad (3.2.13)$$

其中 $\kappa \neq 0$，除非 $\Psi_{ABCD}=0$，此即属于[-]型情形. 因此除[-]型外，我们可假定 $\kappa \neq 0$.

熟知，闭复平面上任三个不同的点，可以经分式线性变换把它们分别映为 1，0，∞点.

[1111]型情形. 不妨假定 $(\beta_A)=(\beta_1,\beta_2)=(1,1)$，$(\gamma_A)=(1,0)$，$(\delta_A)=(0,1)$，于是由(3.2.4)可知

$$\varphi=\kappa(\alpha_1Z^1+\alpha_2Z^2)(Z^1+Z^2)Z^1Z^2,$$

即

$$\Psi_{1111}=0,4\Psi_{1112}=\kappa\alpha_1,6\Psi_{1122}=\kappa(\alpha_1+\alpha_2),$$
$$4\Psi_{1222}=\kappa\alpha_2,\Psi_{2222}=0.$$

根据(3.2.7)有

$$\Psi=\kappa\begin{pmatrix}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{6} & \frac{\alpha_2}{4} & 0\\ -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{3} & -\frac{\alpha_2}{2}\\ 0 & \frac{\alpha_1}{4} & \frac{\alpha_1+\alpha_2}{6}\end{pmatrix}. \quad (3.2.14)$$

令

$$\alpha_1=6,\ \mu=\alpha_2/6,$$

有

$$\Psi=\kappa\begin{pmatrix}1+\mu & \frac{3}{2}\mu & 0\\ -3 & -2(1+\mu) & -3\mu\\ 0 & \frac{3}{2} & 1+\mu\end{pmatrix}.$$

取

$$P=\begin{pmatrix}1 & \mu & \mu\\ 1 & 1 & \mu\\ 1 & 0 & -\mu\end{pmatrix}, \quad (3.2.15)$$

有

$$P\Psi=\begin{pmatrix}\kappa(1-2\mu) & 0 & 0\\ 0 & \kappa(\mu-2) & 0\\ 0 & 0 & \kappa(\mu+1)\end{pmatrix}P,$$

此即Ψ有 Jordan 标准型

$$P\Psi P^{-1}=\begin{pmatrix}\kappa(1-2\mu) & 0 & 0\\ 0 & \kappa(\mu-2) & 0\\ 0 & 0 & \kappa(\mu+1)\end{pmatrix}. \tag{3.2.16}$$

[211] 型情形． 取$(\alpha_A)=(0,\ 6)$，即在(3.2.14)中令$\alpha_1=0,\alpha_2=6$，于是

$$\Psi=\kappa\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.2.17}$$

取

$$P=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ -\frac{2}{3\kappa} & -\frac{1}{3\kappa} & \frac{1}{\kappa}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.2.18}$$

显而易见

$$P\Psi=\begin{pmatrix}-2\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa & 1\\ 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix}P,$$

此即Ψ有 Jordan 标准型

$$P\Psi P^{-1}=\begin{pmatrix}-2\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa & 1\\ 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix}. \tag{3.2.19}$$

[22]型情形.

$\varphi=\kappa(\alpha_A Z^A)^2(\beta_B Z^B)^2$. 可设 $(\alpha_A)=(1,0)$, $(\beta_A)=(0,1)$,于是

$$\Psi=\begin{pmatrix}\kappa & 0 & 0\\ 0 & -2\kappa & 0\\ 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\kappa&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&\kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\tag{3.2.20}$$

此即Ψ有 Jordan 标准型

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Psi\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2\kappa&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&\kappa\end{pmatrix}.\tag{3.2.21}$$

[31]型情形.

$\varphi=\kappa(\alpha_A Z^A)^3(\beta_B Z^B)$, 可取 $(\alpha_A)=(0,1)$,$(\beta_A)=(1,0)$,于是

$$\Psi=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\0&0&-2\kappa\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\kappa}&0\\0&0&\frac{-1}{2\kappa^2}\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&-2\kappa^2\end{pmatrix},\tag{3.2.22}$$

故有 Jordan 标准型

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&-2\kappa^2\end{pmatrix}\Psi\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\kappa}&0\\0&0&\frac{-1}{2\kappa^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.\tag{3.2.23}$$

[4]型情形.

$$\varphi=\kappa(\alpha_A Z^A)^4,\ 可取(\alpha_A)=(0,1)$$

$$\Psi=\begin{pmatrix}0&0&\kappa\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad(3.2.24)$$

Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\kappa}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Psi\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.\qquad(3.2.25)$$

Petrov 最初的分类最后是按Ψ的 Jordan 标准型分类的。[1111]与[22]及[一]皆有对角形的 Jordan 标准型，后继者是前者的蜕化型，通称为 I 型. [211]与[4]型亦通称之为II 型，后者是前者的蜕化型，余下[31]型是 III 型，即

I 型(非蜕化的)

D 型 (I 型的蜕化型)，

O 型 (D 型的蜕化型).

II 型(非蜕化的)

N 型 (II 型的蜕化型).

III型.

$$\begin{pmatrix}\kappa(\mu-2)&0&0\\0&\kappa(1-2\mu)&0\\0&0&\kappa(1+\mu)\end{pmatrix}$$

$$\swarrow\qquad\qquad\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}-2\kappa&0&0\\0&\kappa&1\\0&0&\kappa\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2\kappa&0&0\\0&\kappa&0\\0&0&\kappa\end{pmatrix}$$

$$\swarrow\quad\downarrow\qquad\swarrow\quad\downarrow$$

$$\underset{\text{III型}}{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}\rightarrow\underset{\text{II型}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}\rightarrow\underset{\text{I型}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

综上所证，我们有

定理 3.2.2 Weyl 旋量 Ψ_{ABCD} 所排成的方阵 Ψ，有

$$\Psi=\begin{pmatrix} \Psi_{11}^{11} & \Psi_{12}^{11} & \Psi_{22}^{11} \\ 2\Psi_{11}^{12} & 2\Psi_{12}^{12} & 2\Psi_{22}^{12} \\ \Psi_{11}^{22} & \Psi_{12}^{22} & \Psi_{22}^{22} \end{pmatrix}$$

经过适当的 $SL(2,C)$ 变换化可为下面的标准型之一：

I 型 $$\Psi=\kappa\begin{pmatrix} 1+\mu & \frac{3}{2}\mu & 0 \\ -3 & -2(1+\mu) & -3\mu \\ 0 & \frac{3}{2} & 1+\mu \end{pmatrix}.$$

D 型 $$\Psi=\kappa\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II 型 $$\Psi=\kappa\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

N 型 $$\Psi=\kappa\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III 型 $$\Psi=\kappa\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O 型 $$\Psi=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

它们分别有如下的 Jordan 标准型

I 型
$$\begin{pmatrix} \kappa(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(\mu-2) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa(\mu+1) \end{pmatrix}.$$

D 型
$$\begin{pmatrix} -2\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}.$$

II 型
$$\begin{pmatrix} -2\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 1 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}.$$

N 型
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III 型
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O 型
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 3.3 Weyl 张量的分类

§ 3.1 已得出 Weyl 旋量的表示式

$$C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = \varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}\Psi_{ABCD}\varepsilon_{\bar{G}\bar{H}} + \varepsilon_{AB}\overline{\Psi_{EFGH}}\varepsilon_{CD}, \tag{3.3.1}$$

作右对偶，可以把指标 A, E, B, F 固定而利用（3.1.30）与(3.1.31)式得出

$$C^{*}_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = i(\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}\Psi_{ABCD}\varepsilon_{\bar{G}\bar{H}} - \varepsilon_{AB}\overline{\Psi_{EFGH}}\varepsilon_{CD}). \tag{3.3.2}$$

由上两式可知

$$C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} - iC^*_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}} = 2\Psi_{ABCD}\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}\varepsilon_{\bar{G}\bar{H}}. \qquad (3.3.3)$$

引进复的 Weyl 张量

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{abcd} &= C_{abcd} - iC^*_{abcd} \\ &= 2\Psi_{ABCD}\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}\varepsilon_{\bar{G}\bar{H}}\sigma^{A\bar{E}}_a\sigma^{B\bar{F}}_b\sigma^{C\bar{G}}_c\sigma^{D\bar{H}}_d,\end{aligned}$$

把指标 a,b 上升，有

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{ab}{}_{cd} &= 2\Psi^{AB}{}_{CD}\varepsilon^{\bar{E}\bar{F}}\varepsilon_{\bar{G}\bar{H}}\sigma^a_{A\bar{E}}\sigma^b_{B\bar{F}}\sigma^{C\bar{G}}_c\sigma^{D\bar{H}}_d \\ &= 2\sigma^{ab}_{AB}\Psi^{AB}{}_{CD}\sigma^{CD}_{cd}, \qquad (3.3.4)\end{aligned}$$

其中

$$\sigma^{ab}_{AB} = \sigma^a_{A\bar{E}}\varepsilon^{\bar{E}\bar{F}}\sigma^b_{B\bar{F}}, \sigma^{CD}_{cd} = \sigma^{C\bar{G}}_c\varepsilon_{\bar{G}\bar{H}}\sigma^{D\bar{H}}_d. \qquad (3.3.5)$$

写

$$\begin{aligned}\sigma^{ab} &= (\sigma^{ab}_{AB})_{1\leqslant A,B\leqslant 2} = \sigma^a\varepsilon\sigma^{b'}, \\ \sigma_{ab} &= (\sigma^{CD}_{ab})_{1\leqslant C,D\leqslant 2} = \sigma_a\varepsilon\sigma'_b. \qquad (3.3.6)\end{aligned}$$

据(2.4.16)与(2.4.19)

$$\sigma^{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \sigma^{02} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{03} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{02} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \sigma_{03} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.7)$$

注意上式皆是对称的方阵。因此(3.3.4)可写为

$$\mathscr{C}^{0b}{}_{0d} = 2\,(\sigma^{0b}_{11},\sigma^{0b}_{12},\sigma^{0b}_{22})\begin{pmatrix} \Psi^{11}_{11} & 2\Psi^{11}_{12} & \Psi^{11}_{22} \\ 2\Psi^{12}_{11} & 4\Psi^{12}_{12} & 2\Psi^{12}_{22} \\ \Psi^{22}_{11} & 2\Psi^{22}_{12} & \Psi^{22}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^{11}_{0d} \\ \sigma^{12}_{0d} \\ \sigma^{22}_{0d} \end{pmatrix}.$$

把它排列成为方阵

$$\begin{pmatrix} \mathscr{C}_{01}^{01} & \mathscr{C}_{02}^{01} & \mathscr{C}_{03}^{01} \\ \mathscr{C}_{01}^{02} & \mathscr{C}_{02}^{02} & \mathscr{C}_{03}^{02} \\ \mathscr{C}_{01}^{03} & \mathscr{C}_{02}^{03} & \mathscr{C}_{03}^{03} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{01} & \sigma_{12}^{01} & \sigma_{22}^{01} \\ \sigma_{11}^{02} & \sigma_{12}^{02} & \sigma_{22}^{02} \\ \sigma_{11}^{03} & \sigma_{12}^{03} & \sigma_{22}^{03} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \Psi_{11}^{11} & 2\Psi_{12}^{11} & \Psi_{22}^{11} \\ 2\Psi_{11}^{12} & 4\Psi_{12}^{12} & 2\Psi_{22}^{12} \\ \Psi_{11}^{22} & 2\Psi_{12}^{22} & \Psi_{22}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{01}^{11} & \sigma_{02}^{11} & \sigma_{03}^{11} \\ \sigma_{01}^{12} & \sigma_{02}^{12} & \sigma_{03}^{12} \\ \sigma_{01}^{22} & \sigma_{02}^{22} & \sigma_{03}^{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11}^{11} & 2\Psi_{12}^{11} & \Psi_{22}^{11} \\ 2\Psi_{11}^{12} & 4\Psi_{12}^{12} & 2\Psi_{22}^{12} \\ \Psi_{11}^{22} & 2\Psi_{12}^{22} & \Psi_{22}^{22} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \Psi_{11}^{11} & \Psi_{12}^{11} & \Psi_{22}^{11} \\ 2\Psi_{11}^{12} & 2\Psi_{12}^{12} & 2\Psi_{22}^{12} \\ \Psi_{11}^{22} & \Psi_{12}^{22} & \Psi_{22}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= K_1^{-1} \Psi K_1, \tag{3.3.8}$$

其中 K_1 由(3.2.9)定义，而Ψ由(3.2.7)定义。

令

$$M = \begin{pmatrix} C_{01}^{01} & C_{02}^{01} & C_{03}^{01} \\ C_{01}^{02} & C_{02}^{02} & C_{03}^{02} \\ C_{01}^{03} & C_{02}^{03} & C_{03}^{03} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} C^{*01}_{\ \ 01} & C^{*01}_{\ \ 02} & C^{*01}_{\ \ 03} \\ C^{*02}_{\ \ 01} & C^{*02}_{\ \ 02} & C^{*02}_{\ \ 03} \\ C^{*03}_{\ \ 01} & C^{*03}_{\ \ 02} & C^{*03}_{\ \ 03} \end{pmatrix}, \tag{3.3.9}$$

则据(3.3.4)可知(3.3.8)可写为

$$M - iN = K_1^{-1} \Psi K_1. \tag{3.3.10}$$

据定理3.2.1，式(3.2.8)及(3.2.12)可知，当作旋量 Ψ_{ABCD} 的变换时，相当于有

$$\begin{aligned} \widetilde{M} - i\widetilde{N} &= K_1^{-1}\widetilde{\Psi}K_1 = K_1^{-1}\mathscr{R}_s(\mathfrak{A})\Psi\mathscr{R}_s^{-1}(\mathfrak{A})K_1 \\ &= \mathscr{R}_{K_1}(\mathfrak{A})K_1^{-1}\Psi K_1\mathscr{R}_{K_1}^{-1}(\mathfrak{A}) = \mathscr{R}_{K_1}(\mathfrak{A})(M \\ &\quad - iN)\mathscr{R}_{K_1}^{-1}(\mathfrak{A}), \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

其中 $\mathscr{R}_{K_1}(\mathfrak{A})$ 是复的 3×3 正交方阵.

又由(3.3.8)可知

$$\mathrm{tr}(M-iN)=\Psi_{2211}-2\Psi_{2112}+\Psi_{1122}=0. \tag{3.3.12}$$

现在把 Weyl 张量 $C^{ab}{}_{cd}$ 的指标对 ab 给定一个次序

$$ab=01,02,03,32,13,21, \tag{3.3.13}$$

而把 Weyl 张量按此次序排列成为 6×6 方阵

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} C^{01}_{01} & C^{01}_{02} & C^{01}_{03} & C^{01}_{32} & C^{01}_{13} & C^{01}_{21}\\ C^{02}_{01} & C^{02}_{02} & C^{02}_{03} & C^{02}_{32} & C^{02}_{13} & C^{02}_{21}\\ C^{03}_{01} & C^{03}_{02} & C^{03}_{03} & C^{03}_{32} & C^{03}_{13} & C^{03}_{21}\\ \hline C^{32}_{01} & C^{32}_{02} & C^{32}_{03} & C^{32}_{32} & C^{32}_{13} & C^{32}_{21}\\ C^{13}_{01} & C^{13}_{02} & C^{13}_{03} & C^{13}_{32} & C^{13}_{13} & C^{13}_{21}\\ C^{21}_{01} & C^{21}_{02} & C^{21}_{03} & C^{21}_{32} & C^{21}_{13} & C^{21}_{21} \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} M & T\\ P & S \end{pmatrix}. \tag{3.3.14}$$

据(2.1.6)

$$C_{abcd}=-{}^{*}C^{*}_{abcd}=-\frac{1}{4}\,\varepsilon_{abc_1d_1}C^{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon_{a_1b_1cd},$$

故有

$$C^{ab}{}_{cd}=-\frac{1}{4}\,\varepsilon^{ab}{}_{c_1d_1}C^{c_1d_1}{}_{a_1b_1}\varepsilon^{a_1b_1}{}_{cd}. \tag{3.3.15}$$

把 $\varepsilon^{ab}{}_{cd}$ 按(3.3.13)的次序排列成 6×6 方阵

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{01}_{01} & \varepsilon^{01}_{02} & \cdots & \varepsilon^{01}_{21}\\ \varepsilon^{02}_{01} & \varepsilon^{02}_{02} & \cdots & \varepsilon^{02}_{21}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varepsilon^{21}_{01} & \varepsilon^{21}_{02} & \cdots & \varepsilon^{21}_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & I\\ -I & O \end{pmatrix},$$

因此(3.3.15)可写为矩阵的形式即

$$C = -\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},$$

由此可知

$$C = \begin{pmatrix} M & -P \\ P & M \end{pmatrix}. \tag{3.3.16}$$

另一方面，由

$$C^{*ab}{}_{cd} = \frac{1}{2} C^{ab}{}_{c_1d_1} \varepsilon^{c_1d_1}{}_{cd},$$

可知

$$C^{*ab}{}_{01} = -C^{ab}{}_{32}, \quad C^{*ab}{}_{02} = -C^{ab}{}_{13},$$
$$C^{*ab}{}_{03} = -C^{ab}{}_{21}, \quad C^{*ab}{}_{32} = -C^{ab}{}_{01},$$
$$C^{*ab}{}_{13} = -C^{ab}{}_{02}, \quad C^{*ab}{}_{21} = -C^{ab}{}_{03}.$$

据N及P的定义得知

$$N = P,$$

因此，有

$$C = \begin{pmatrix} M & -N \\ N & M \end{pmatrix}. \tag{3.3.17}$$

现在我们根据上节关于Ψ的 Jordan 标准型来作 Weyl 张量所排成的方阵C的分类. 据(3.3.10)，令

$$\Psi_1 = M - iN = K_1^{-1}\Psi K_1, \tag{3.3.18}$$

由(3.3.11)可知，当旋量 Ψ_{ABCD} 作 $SL(2,C)$ 的变换时，

$$\tilde{\Psi}_1 = O\Psi_1 O', \tag{3.3.19}$$

其中 $O \in SO(3,C)$，亦即 Weyl 张量 C_{abcd} 作 $SO(1,3)$的变换时，Ψ_1作 $SO(3,C)$的变换. 现在问题是Ψ_1在 $SO(3,C)$下的标准型是什么. 据(3.3.18)存在非异的 3×3 复方阵P，使得

$$P\Psi_1P^{-1} = K, \tag{3.3.20}$$

其中K是Ψ的 Jordan 标准型之一。

据(3.2.7)可知

$$\Psi = B_0\Psi_0, \tag{3.3.21}$$

其中

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_0 = \begin{pmatrix} \Psi_{1111} & \Psi_{1112} & \Psi_{1122} \\ \Psi_{1211} & \Psi_{1212} & \Psi_{1222} \\ \Psi_{2211} & \Psi_{2212} & \Psi_{2222} \end{pmatrix}. \tag{3.3.22}$$

注意 B_0 与 Ψ_0 是对称的，并且

$$B_0 = \frac{-1}{2} K_1K_1', \tag{3.3.23}$$

因此由(3.3.19)可知

$$\begin{aligned}\Psi_1' &= K_1'\Psi'K_1'^{-1} = K_1'\Psi_0B_0K_1'^{-1} \\ &= K_1'B_0^{-1}\Psi B_0K_1'^{-1} = K_1'(K_1K_1')^{-1}\Psi(K_1K_1')K_1'^{-1} = \Psi_1,\end{aligned}$$

即 Ψ_1 是对称的，因此由(3.3.20)可知

$$P^{-1}KP = \Psi_1 = \Psi_1' = P'K'P'^{-1},$$

或者

$$KPP' = PP'K'. \tag{3.3.24}$$

令

$$A = PP', \tag{3.3.25}$$

这是对称的非异方阵，则(3.3.24)即

$$KA = AK'. \tag{3.3.26}$$

现取非异的方阵 N，使

$$KN = NK, \tag{3.3.27}$$

则由 (3.3.20) 可知

$$NP\Psi_1(NP)^{-1} = K. \tag{3.3.28}$$

若选取N使得

$$A_0 = NAN', \tag{3.3.29}$$

化为标准型，又取 P_0 使

$$A_0 = P_0P_0', \tag{3.3.30}$$

则由(3.3.25,29,30)可知

$$I = P_0^{-1}NP \cdot P'N'P_0'^{-1},$$

这表明

$$O = P_0^{-1}NP \tag{3.3.31}$$

是复正交方阵，而由(3.3.28)可知

$$O\Psi_1O' = O\Psi_1O^{-1} = P_0^{-1}KP_0. \tag{3.3.32}$$

我们不妨假定 $\det O = 1$，否则以 O 换 $-O$，上式左边不变。这证明 Ψ_1 可经 $SO(3,C)$ 的相似变换化为标准型 $P_0^{-1}KP_0$。现在应用上面的结果于上节 Ψ 的各种 Jordan 标准型。

I 型与 D 型。

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{array}$$

由 $KA = AK'$ 与 $KN = NK$ 可知 A 与 N 必为下之形式

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 与 N_1, A_2 与 N_2, A_3 与 N_3 分别是 s_1, s_2, s_3 阶方阵，$s_1 + s_2 + s_3 = 3$. A 是非异对称的，必有 N 使

$$A_0 = NAN' = I,$$

由此可知，可取(3.3.30)中 $P_0 = I$. 因此 Ψ_1 有标准型

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_j, \beta_j (j = 1,2,3)$ 为实适合 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$. 在 D 型时 $\lambda_2 = \lambda_3, \lambda_1 = -2\lambda_2$.

II 型. 此时

$$K=\begin{pmatrix}-2\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa & 1\\ 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix},\quad \kappa\neq 0.$$

由 $AK'=KA$ 知 A 必为下之形式

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & c & b\\ 0 & b & 0\end{pmatrix},\quad a,b\neq 0,\text{因} A \text{非异}.$$

由 $NK=KN$ 知必须

$$N=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & z\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}.$$

取 x, y, z 使得 $ax^2=1, by^2=1, cy+bz=0$ 则有

$$A_0=NAN'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=P_0P_0',$$

其中

$$P_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2}\\ 0 & 1 & i\end{pmatrix},$$

于是有

$$P_0^{-1}KP_0=\begin{pmatrix}-2\kappa & 0 & 0\\ 0 & 1+\kappa & i\\ 0 & i & \kappa-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\alpha & & \\ & \alpha+1 & \\ & & \alpha-1\end{pmatrix}$$

$$+i\begin{pmatrix}-2\beta & & \\ & \beta & 1\\ & 1 & \beta\end{pmatrix},$$

其中 $\kappa = \alpha + i\beta$.

N型. 此时

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由 $AK' = KA$ 可知，必须有

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $\det A = -af^2 \neq 0$ 知必须 $a, f \neq 0$. 由 $NK = KN$ 可知 N 必须为下述形式

$$N = \begin{pmatrix} r & 0 & t \\ u & z & w \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

取

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & (0, 0) \\ -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} & I \end{pmatrix},$$

则 $N_1K = KN_1$, 使

$$N_1AN_1' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad f_1 \neq 0.$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} |a|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

其中 z, w 使

$$f_1z^2 = 1, \quad e_1z + f_1w = 0,$$

则 $N_2K = KN_2$，使

$$A_0 = N_2N_1AN_1'N_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & & \end{pmatrix} = P_0P_0',$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix},$$

则

$$P_0^{-1}KP_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III型.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由 $AK' = KA$ 可知

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ c \neq 0.$$

由 $NK = KN$ 可知

$$N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

故

$$A_0 = NAN' = \begin{pmatrix} ax^2 + 2bxy + 2cz + y^2 & x(bx + 2cy) & cx^2 \\ x(b + 2cy) & cx^2 & 0 \\ cx^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取 x, y, z 使

$$cx^2 = 1, \quad bx + 2cy = 0,$$

$$2cz + ax^2 + 2bxy + by^2 = 0,$$

则有

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_0 P_0', \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix},$$

于是

$$P_0^{-1} K P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据上面所证，并应用(3.3.17)，(3.3.18)可得出

定理 3.3.1 若把对罗伦兹标架 $\{e^i_{(a)}\}$ 的 Weyl 张量 C_{abcd} 排成(3.3.14)的方阵 C，则对每一点 x 可选取适当的标架 $\{e^i_{(a)}(x)\}$，使得 C 化为下面标准型之一：

I 型。

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3 \\ \hline -\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{array}\right), \quad \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0. \end{array}$$

D 型。

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\alpha & 0 & 0 & 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \hline -2\beta & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right).$$

II型。

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2\alpha & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 1 & \beta \\ \hline 2\beta & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 & 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & -1 & -\beta & 0 & 0 & \alpha-1 \end{array}\right).$$

N型。

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

III型。

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

§ 3.4 Weyl 旋量的特征双向量和主方向

一斜对称二阶张量 V^{ab} 称为双向量. 双向量 V^{ab} 称为简单的，若存在两个向量 ξ^a 与 η^a 使

$$V^{ab} = \xi^a \eta^b - \xi^b \eta^a.$$

它对应一个二维的线性空间，即所有向量 $\lambda\xi^a + \mu\eta^a, \lambda, \mu \in R$，所成的线性空间. 两简单的双向量称为有交线的，若它们对应的两个二维线性空间有一公共的一维线性空间.

双向量 V^{ab} 称为 Weyl 张量的特征双向量，若有

$$\frac{1}{2} C^{ab}{}_{cd} V^{cd} = \lambda V^{ab}, \tag{3.4.1}$$

其中 λ 是一复数. V^{ab} 不一定是简单的双向量，但下面将证明

$$\frac{1}{2}(V^{ab} + \bar{V}^{ab}) \quad 与 \quad \frac{1}{2}(V^{ab} - \bar{V}^{ab})$$

是实的简单双向量. 一 Weyl 张量的所有的特征双向量的实部与虚部的简单双向量如果其中两个有交线的话，此交线称为 Weyl 张量的主方向.

若把 V^{ab} 排列成为

$$v = (V^{01}, V^{02}, V^{03}, V^{32}, V^{13}, V^{21})',$$

而把 Weyl 张量排列成(3.3.14)的方阵，于是(3.4.1)可写为

$$Cv = \lambda v. \tag{3.4.2}$$

据(3.3.17)和(3.3.18)

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{i}{\sqrt{2}} I & \frac{-i}{\sqrt{2}} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 \\ 0 & \bar{\Psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{i}{\sqrt{2}} I & \frac{-i}{\sqrt{2}} I \end{pmatrix}^{-1}, \tag{3.4.3}$$

由此可知，如 $u=(u^1,u^2,u^3)'$是Ψ_1 的特征向量，即

$$\Psi_1 u = \lambda u,$$

则

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u \\ iu \end{pmatrix}$$

及

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ i\bar{u} \end{pmatrix}$$

皆是C的特征向量.

应用定理 3.3.1，Weyl 张量的特征双向量分别为 I 型与 D型. 此时

$$\Psi_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

有独立的特征向量

$$u_1=(1,0,0)',\ u_2=(0,1,0)',\ u_3=(0,0,1)',$$

因而C的特征向量(可以差一常数因子)为

$$v_1=(1,0,0,i,0,0)',\ v_2=(0,1,0,0,i,0)',$$
$$v_3=(0,0,1,0,0,i)',$$
$$v_4=\bar{v}_1, v_5=\bar{v}_2, v_6=\bar{v}_3.$$

所以 $C^{ab}{}_{cd}$ 的特征双向量为

$$\begin{aligned}
V_1^{ab}&=(\delta_0^a\delta_1^b-\delta_0^b\delta_1^a)+i(\delta_3^a\delta_2^b-\delta_3^b\delta_2^a),\\
V_2^{ab}&=(\delta_0^a\delta_2^b-\delta_0^b\delta_2^a)+i(\delta_1^a\delta_3^b-\delta_1^b\delta_3^a),\\
V_3^{ab}&=(\delta_0^a\delta_3^b-\delta_0^b\delta_3^a)+i(\delta_2^a\delta_1^b-\delta_2^b\delta_1^a),\\
V_4^{ab}&=\bar{V}_1^{ab},\ V_5^{ab}=\bar{V}_2^{ab},\ V_6^{ab}=\bar{V}_3^{ab}.
\end{aligned}\qquad(3.4.3)'$$

由此可见，Weyl 张量有四个主方向

$$\delta_0^a,\ \delta_1^a,\ \delta_2^a,\ \delta_3^a,\qquad(3.4.4)$$

恰为标架的四个轴的方向，有一个方向 δ_0^a 是类时的。

II型与N型. 此时

$$\Psi_1=\begin{pmatrix}-2\kappa & 0 & 0\\ 0 & \kappa+1 & i\\ 0 & i & \kappa-1\end{pmatrix},$$

因此 Ψ_1 有两个独立的特征向量

$$u_1=(1,0,0)',\quad u_2=(0,1,i)',$$

而 C 有 4 个独立的特征向量

$$v_1=(1,0,0,i,0,0)',\quad v_2=(0,1,i,0,i,-1)',$$

$$v_3=\bar{v}_1,\quad v_4=\bar{v}_2.$$

由此可知，Weyl 张量的特征双向量为

$$V_1^{ab}=(\delta_0^a\delta_1^b-\delta_0^b\delta_1^a)+i(\delta_3^a\delta_2^b-\delta_3^b\delta_2^a),$$

$$\begin{aligned}V_2^{ab}&=(\delta_0^a\delta_2^b-\delta_0^b\delta_2^a-\delta_2^a\delta_1^b+\delta_2^b\delta_1^a)+i(\delta_0^a\delta_3^b-\delta_0^b\delta_3^a\\&\quad+\delta_1^a\delta_3^b-\delta_1^b\delta_3^a)=(\delta_0^a+\delta_1^a)\delta_2^b-(\delta_0^b+\delta_1^b)\delta_2^a\\&\quad+i[(\delta_0^a+\delta_1^a)\delta_3^b-(\delta_0^b+\delta_1^b)\delta_3^a],\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

$$V_3^{ab}=\bar{V}_1^{ab},$$

$$V_4^{ab}=\bar{V}_2^{ab},$$

故 Weyl 张量的三个主方向

$$\delta_0^a+\delta_1^a,\quad \delta_2^a,\quad \delta_3^a,\tag{3.4.6}$$

其中没有一个是类时的，但 $\delta_0^a+\delta_1^a$ 是类光的。

III型. 此时

$$\Psi_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & i\\ 1 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix}$$

有一特征向量

$$u=(0,1,i)',$$

故 C 有特征向量 $v_1=(0,1,i,0,i,-1)',v_2=\bar{v}_1$.

由此可知，$C^{ab}{}_{cd}$ 有特征双向量

$$V_1^{ab} = (\delta_0^a\delta_2^b - \delta_0^b\delta_2^a - \delta_2^a\delta_1^b + \delta_2^b\delta_1^a) + i(\delta_0^a\delta_3^b - \delta_0^b\delta_3^a + \delta_1^a\delta_3^b - \delta_1^b\delta_3^a) = [(\delta_0^a + \delta_1^a)\delta_2^b - (\delta_0^b + \delta_1^b)\delta_2^a] + i[(\delta_0^a + \delta_1^a)\delta_3^b - (\delta_0^b + \delta_1^b)\delta_3^a], \tag{3.4.7}$$

$$V_2^{ab} = \overline{V_1^{ab}},$$

故 Weyl 张量有一主方向

$$\delta_0^a + \delta_1^a, \tag{3.4.8}$$

这是类光的。

在 § 2.2 中讨论电磁辐射的时候，认为没有电磁辐射的充要条件为能量、动量、张量 T_b^a 有类时特征向量。 Pirani 把 Weyl 张量 $C^{ab}{}_{cd}$ 类比作 T_b^a，而把 $C^{ab}{}_{cd}$ 的主方向类比为 T_b^a 的特征向量，他认为真空引力场之解如果使 Weyl 张量的主方向有一类时，则没有引力辐射。 如果 Weyl 张量没有类时的主方向，则有引力辐射，这样 I 型和 D 型是没有引力辐射的，而 II，N，III 型则有引力辐射。 这种类比是几何代数的类比，它是否合理，第一要看是否和以往广义相对论的引力波理论是否有矛盾；第二要看按此定义能否推进引力波的理论研究。

首先，熟知真空引力场的 Schwarzschild 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{x^1}\right)(dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2a}{x^1}\right)^{-1}[(dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1 \sin x^2)^2(dx^3)^2]$$

是属于 D 型，按定义是没有引力辐射，这和 Birkoff 所证明的定理“球对称真空引力场必然可选取一坐标系使之为静态的”，故没有引力波是相一致的。 其次，按此定义 N 型的一种解，平面波前引力波，使得引力波理论的研究有了不少进展，这将在下一章中介绍。

§ 3.5 能量、动量、张量的分类

Einstein 的引力场方程对伪正交标架为

$$R_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}R=T_{ab}, \tag{3.5.1}$$

其中 T_{ab} 为对称张量，称为能量-动量张量。
当 $T_{ab}=0$ 时，(3.5.1)化为

$$R_{ab}=0, \tag{3.5.2}$$

这称为真空引力场方程，此时 Weyl 张量与黎曼曲率张量相等，故 Weyl 张量的分类相当于真空引力场的黎曼曲率张量的分类. 如果 T_{ab} 不全为零，则黎曼曲率张量不等于 Weyl 张量，据(2.1.15)的 Géhéniau-Debever 分解，即

$$R_{abcd}=C_{abcd}+E_{abcd}+\frac{R}{12}G_{abcd}, \tag{3.5.3}$$

其中 E_{abcd} 可由(2.1.10)定义，利用(3.5.1)可化为

$$E_{abcd}=\frac{1}{2}[\eta_{ac}T_{bd}-\eta_{cb}T_{ad}-\eta_{ad}T_{bc}+\eta_{db}T_{ac}]$$

$$+\frac{R}{4}(\eta_{ac}\eta_{bd}-\eta_{cb}\eta_{ad}),$$

而 G_{abcd} 由(2.1.8)定义，只与 η_{ab} 有关，因此

$$R_{abcd}=C_{abcd}+\frac{1}{2}(\eta_{ac}T_{bd}-\eta_{cb}T_{ad}-\eta_{ad}T_{bc}$$

$$+\eta_{db}T_{ac})+\frac{R}{3}(\eta_{ac}\eta_{bd}-\eta_{cb}\eta_{ad}). \tag{3.5.4}$$

由此可知，曲率张量 R_{abcd} 的分类，依赖于能量-动量张量 T_{ab} 的分类，而 T_{ab} 的分类即是在 Lorentz 群下对称方阵的分类。

现在的问题是给与 4×4 实对称方阵 T，作变换

$$\tilde{T}=L'TL, \tag{3.5.5}$$

其中 L 满足

$$L'JL=J,\quad J=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \tag{3.5.6}$$

的实方阵，使得 $\widetilde{T}$ 化为标准型.

对(3.5.6)取逆方阵，容易知道，L 满足(3.5.6)必满足

$$L^{-1}J(L')^{-1} = J \text{ 或 } L^{-1}J = JL', \tag{3.5.7}$$

因此(3.5.5)可写为

$$J\widetilde{T} = L^{-1}(JT)L, \tag{3.5.8}$$

这表明对称张量 T 在 Lorentz 群下的分类化为方阵 JT 在 Lorentz 相似变换下的分类.

熟知存在非异的实方阵 Q（马尔采夫[6]）使得

$$Q^{-1}(JT)Q = K, \tag{3.5.9}$$

其中 K 为实的 Jordan 标准型. 上式即

$$T = JQKQ^{-1},$$

T 是对称的，必须

$$JQKQ^{-1} = Q'^{-1}K'Q'J,$$

或者

$$Q'JQK = K'Q'JQ.$$

令

$$A = Q'JQ, \tag{3.5.10}$$

有

$$AK = K'A. \tag{3.5.11}$$

引理 3.5.1 若 T 是实对称方阵，K 是 JT 的实 Jordan 标准型，则必存在非异的、对称的号差为 -2 的实方阵 A，使 $AK = K'A$.

若 K 是 JT 的实 Jordan 标准型，Q 是使(3.5.9)成立的实方阵，N 是与 K 可交换的实方阵，即

$$NK = KN, \tag{3.5.12}$$

则

$$N^{-1}Q^{-1}(JT)QN = K. \tag{3.5.13}$$

由于(3.5.10)定义的方阵 A 适合(3.5.11)，故方阵

$$A_0 = N'AN = (QN)'J(QN) \tag{3.5.14}$$

亦满足

$$A_0K = K'A_0,$$

A_0 也是对称的，号差为-2。我们选取 N，使 $A_0 = N'AN$ 化为标准型，并选取一简单的 P_0 使得

$$A_0 = P_0'JP_0, \tag{3.5.15}$$

则由(3.5.14)可知

$$J = P_0'^{-1}(QN)'J(QN)P_0^{-1},$$

这表示

$$L = QNP_0^{-1} \tag{3.5.16}$$

是一 Lorentz 方阵。用 P_0 与 P_0^{-1} 分别从左与右边乘以(3.5.13)便可得出

$$L^{-1}(JT)L = P_0KP_0^{-1}, \tag{3.5.17}$$

这是说 JT 可以经 Lorentz 方阵 L 的相似变换化为标准型 $P_0KP_0^{-1}$。而 T 的标准型为

$$L'TL = JP_0KP_0^{-1}, \tag{3.5.18}$$

下面便是用此法把 T 的标准型定出来。

首先我们排除 JT 不可能有的实的 Jordan 标准型。首先证明

引理 3.5.2 若 T 为实对称方阵，则 JT 不可能有多于两个的复的特征根。

证 设 JT 有多于两个的复的特征根，由于 JT 为实，它必有四个复的特征根，两两互相复共轭。此时 JT 的实 Jordan 标准型只能是下面两种情形之一：

(i)

$$K = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0, \delta \neq 0;$$

(ii)
$$K=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} & I^{(2)}\\ 0 & \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\end{pmatrix},\quad \beta\neq 0,$$

$$I^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

设K为(i)的情形，令A为对称的、非异的、号差为-2的实方阵适合$AK=K'A$，把A分为2×2小块

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ B_1' & A_2\end{pmatrix},\quad A_1=A_1',A_2=A_2'.$$

由

$$A_1\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}A_1,$$

$$A_2\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\delta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\delta\\ \delta & \gamma\end{pmatrix}A_2,$$

$$B_1\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\delta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}B_1$$

的前两矩阵方程可知，必须有

$$A_1=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}d & c\\ c & -d\end{pmatrix},$$

而 $(B_1)=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$要适合

$$(\gamma-\alpha)x-\delta y+\beta z=0,$$
$$\delta x+(\gamma-\alpha)y+\beta t=0,$$

$$-\beta x+(\gamma-\alpha)z-\delta t=0,$$

$$-\beta y+\delta z+(\gamma-\alpha)t=0.$$

(3.5.19)

若此方程组的系数行列式不为零，则只有 $B_1=0$，此时

$$\det A=\det A_1\cdot\det A_2=(a^2+b^2)(d^2+c^2)>0,$$

这是不可能的. 若行列式

$$\det\begin{pmatrix}\gamma-\alpha & -\delta & \beta & 0\\ \delta & \gamma-\alpha & 0 & \beta\\ -\beta & 0 & \gamma-\alpha & -\delta\\ 0 & -\beta & \delta & \gamma-\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\det\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & -iI\\ I & iI\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|cc}\gamma-\alpha & -\delta & \beta & 0\\ \delta & \gamma-\alpha & 0 & \beta\\ \hline -\beta & 0 & \gamma-\alpha & -\delta\\ 0 & -\beta & \delta & \gamma-\alpha\end{array}\right)\times\begin{pmatrix}I & I\\ iI & -iI\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left|\det\left[\begin{pmatrix}\gamma-\alpha & -\delta\\ \delta & \gamma-\alpha\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right]\right|^2$$

$$=|(\gamma-\alpha)^2+\delta^2-\beta^2+2i\beta(\gamma-\alpha)|^2=0,$$

则由 $\beta\neq 0$ 可知必须 $\gamma=\alpha,\delta^2=\beta^2$. 方程(3.4.18)化为

$$-\delta y+\beta z=0,\quad \delta x+\beta t=0,$$

$$-\beta x-\delta t=0,\quad -\beta y+\delta z=0.$$

由此可知

$$\frac{y}{z}=-\frac{x}{t}=\frac{\beta}{\delta},$$

故

$$B_1=\begin{cases}\begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}, & 当\ \delta=\beta;\\ \begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}, & 当\ \delta=-\beta,\end{cases}$$

因此

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}B_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & x-iy\\ x+iy & 0\end{pmatrix}, & 当\ \beta=\delta,\\ \begin{pmatrix}x+iy & 0\\ 0 & x-iy\end{pmatrix}, & 当\ \beta=-\delta.\end{cases}$$

由此可知

$$\det A=\det\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ B_1' & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right]$$

$$
= \begin{cases} \det\begin{pmatrix} 0 & a-ib & 0 & x-iy \\ a+ib & 0 & x+iy & 0 \\ 0 & x-iy & 0 & d-ic \\ x+iy & 0 & d+ic & 0 \end{pmatrix} \\ \quad = |(a+ib)(d+ic)-(x+iy)^2|^2, \text{ 当 } \beta=\delta; \\ \det\begin{pmatrix} 0 & a-ib & x+iy & 0 \\ a+ib & 0 & 0 & x-iy \\ x-iy & 0 & 0 & d-ic \\ 0 & x+iy & d+ic & 0 \end{pmatrix} \\ \quad = |(a+ib)(d-ic)-(x-iy)^2|^2, \text{ 当 } \beta=-\delta, \end{cases}
$$

故 $\det A \geqslant 0$，这是不可能的，因 A 的号差为 -2，即 K 为(i)的情形不可能.

若 K 为(ii)的情形，必有 A 如前使 $AK = K'A$. 由

$$
A_1\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} A_1,
$$

$$
A_1 + B_1\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} B_1,
$$

$$
B'_1 + A_2\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = B_1 + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} A_2
$$

的第一个矩阵方程可知

$$
A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.
$$

由第二个矩阵方程可知

$$
\beta(y-z) = -a = -\beta(y-z),
$$
$$
\beta(x+t) = -b = -\beta(x+t),
$$

可知 $y = z, t = -x$，即

$$B_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}.$$

由第三个矩阵方程可知

$$A_2 = \begin{pmatrix} d & c \\ c & -d \end{pmatrix}.$$

因此，如(i)所曾计算的

$$\det A = |(a + ib)(d + ic) - (x + iy)^2|^2 \geqslant 0,$$

这与 A 的号差为 -2 是矛盾的，引理得证。

引理3.5.3 若 T 是实对称方阵，则 JT 的二次的初等因子最多只有一个.

证 应用引理 3.5.2，我们只须证明 JT 的实 Jordan 标准型不可能为下述之形式

$$\text{(i)}\ K = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\ \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ 为实},$$

$$\text{(ii)}\ K = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix},\ \beta \neq 0,\ \alpha,\ \lambda_1 \text{ 为实}.$$

如上述引理的证明一样，写

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1' & A_2 \end{pmatrix},$$

而比较 $AK = K'A$ 的元素.

(i)的情形. 由

$$A_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} A_1,$$

$$A_2\begin{pmatrix}\lambda_2 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 1 & \lambda_2\end{pmatrix}A_2,$$

$$B_1\begin{pmatrix}\lambda_2 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_1\end{pmatrix}B_1,$$

可知

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & c\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0 & c\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{cases}0, & \text{当 } \lambda_1\neq\lambda_2,\\ \begin{pmatrix}0 & y\\ y & z\end{pmatrix}, & \text{当 } \lambda_1=\lambda_2,\end{cases}$$

故有

$$\det A=\begin{cases}b^2c^2\geqslant 0, & \text{当 } \lambda_1\neq\lambda_2,\\ (bc-y^2)^2\geqslant 0, & \text{当 } \lambda_1=\lambda_2,\end{cases}$$

这是不可能的.

(ii)的情形. 由

$$A_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_1\end{pmatrix}A_1, A_2\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}A_2,$$

$$B_1\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_1\end{pmatrix}B_1,$$

可知

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & c\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}d & c\\ c & -d\end{pmatrix}$$

及

$$(\lambda_1-\alpha)x+\beta y=0,\quad -\beta x+(\lambda_1-\alpha)y=0,$$
$$(\lambda_1-\alpha)z+\beta t=-x,\ -\beta z+(\lambda_1-\alpha)t=-y.$$

由前两个方程得知，如 x 与 y 不全为零，λ_1 必须是方阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$$

的特征根. 但此方阵的特征根是复数，故必须 $x=y=0$，因而后两方程得出 $z=t=0$.

$$\det A=b^2(d^2+c^2)\geqslant 0$$

这是不可能的. 引理得证.

引理 3.5.4 若 T 为实对称，则 JT 不能有四次的初等因子.

证 若 JT 有四次初等因子，则其 Jordan 标准型为

$$K=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

若有方阵 A 使 $AK=K'A$，则必须

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & a & b & c\\ a & b & c & d\end{pmatrix},$$

而 $\det A=a^4\geqslant 0$，这是不可能的. 引理得证.

除去引理 3.5.3，3.5.4 的不可能情形外，其它 Jordan 标准型皆是可能的，即

定理 3.5.5 若 T 是实对称方阵，则存在一 Lorentz 方阵 L，使方阵

$$K_1=L^{-1}(JT)L$$

为下面标准型之一：

I. JT 的实数域初等因子皆为一次时，有

$$K_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix};$$

II_6 ($\varepsilon = \pm 1$). JT 的实数域初等因子有一为二次而所有特征根皆为实时，有

$$K_1 = \begin{pmatrix} \lambda_3 + \frac{\varepsilon}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda_3 - \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$$

III. JT 的实数域初等因子有一为三次时，有

$$K_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix};$$

IV. JT 有一复的特征根时，有

$$K_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \beta \neq 0.$$

证 由于存在非异实方阵 Q 使得

$$Q^{-1}(JT)Q = K, \tag{3.5.20}$$

其中 K 是实的 Jordan 标准型. 已知有

$$AK = K'A,\ A = Q'JQ. \tag{3.5.21}$$

此外，若非异方阵 N 适合

$$NK = KN, \tag{3.5.22}$$

则把 (3.5.20) 中的 Q 换为 QN 时仍成立. 注意，所有适合

(3.5.22)的N成一群。

据引理 3.5.3 和引理 3.5.4，实 Jordan 标准型只有下面四种情形：

I.

$$K=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu_4\end{pmatrix}\quad \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\mu_3\geqslant\mu_4$$

此时适合(3.5.21)的方阵A必须为下述之形式

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_4\end{pmatrix},$$

其中 A_j 是 $s_j\times s_j$ 方阵，$4\geqslant s_j\geqslant 0, j=1,2,3,4$并且适合 $s_1+s_2+s_3+s_4=4$. 由于A的号差为-2，故可写

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_4\end{pmatrix}'P_0'JP_0\begin{pmatrix}N_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_4\end{pmatrix},\quad(3.5.23)$$

其中 N_j 是 $s_j\times s_j$ 方阵，P_0是一排列方阵，即它的每一行元素只有一个为 1，其它为 0，而 P_0 要是非异的。

令

$$N=\begin{pmatrix}N_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_4\end{pmatrix},$$

则 $NK=KN$，故有

$$P_0NQ^{-1}(JT)QN^{-1}P_0^{-1}=P_0KP_0^{-1},$$

其中 $K_1 = P_0KP_0^{-1}$ 仍然是对角线方阵，由于（3.5.23）左边等于 $Q'JQ$，此式可写为

$$P_0^{-1\prime}N'^{-1}Q'JQN^{-1}P_0^{-1} = J,$$

即 $L = QN^{-1}P_0^{-1}$ 是 Lorentz 方阵. 这证明了定理中 I 的情形.

II.

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

由(3.5.21)可知，必须有

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & d \\ b & c & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ d & e & f & g \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &\text{其中 } b = 0, \text{ 当 } \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ &d = 0, \text{ 当 } \lambda_1 \neq \lambda_3; \\ &e = 0, \text{ 当 } \lambda_2 \neq \lambda_3; \end{aligned} \qquad (3.5.24)$$

由(3.5.22)可知，必须有

$$N = \begin{pmatrix} \xi_{00} & \xi_{01} & 0 & \xi_{03} \\ \xi_{10} & \xi_{11} & 0 & \xi_{13} \\ \xi_{20} & \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &\text{其中 } \xi_{01} = \xi_{10} = 0, \text{ 当 } \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ &\xi_{03} = 0, \text{ 当 } \lambda_1 \neq \lambda_3; \\ &\xi_{13} = 0, \text{ 当 } \lambda_2 \neq \lambda_3; \end{aligned} \qquad (3.5.25)$$

由(3.5.21)中 A 的定义可知

$$\det A = -(ac - b^2)f^2 < 0,$$

故方阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

的行列式必须>0. 作方阵

$$N_1 = \begin{pmatrix} I^{(2)} & -A_1^{-1}\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & e \end{pmatrix} \\ 0 & I^{(2)} \end{pmatrix},$$

则方阵是(3.5.25)的形式，必与K可交换，由此可知

$$N_1'AN_1=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}0 & f\\ f & h\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

上式左边之号差仍为-2，右边之中$\begin{pmatrix}0 & f\\ f & h\end{pmatrix}$的号差为0，故$A_1$的号差必须为$-2$，即$A_1$为定负的，故存在$2\times 2$非异方阵$N_0$，使

$$A_1=-N_0'N_0.$$

取

$$N_2=\begin{pmatrix}N_0^{-1} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}\end{pmatrix},\qquad x\neq 0,$$

于是

$$N_2'N_1'AN_1N_2=\begin{pmatrix}-I^{(2)} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}0 & x^2f\\ x^2f & 2fxy+hx^2\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

选取x,y使得

$$\begin{cases}x^2f=\varepsilon, & (\varepsilon=\pm 1\text{ 视 }f\text{ 为正或为负而定})\\ (2fy+hx)x=0,\end{cases}$$

于是

$$N_2'N_1'AN_1N_2=\begin{pmatrix}-I^{(2)} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon & 1\\ 1 & -\varepsilon\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-I^{(2)} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times J \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix} = P_0 J P_0',$$

其中

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix},$$

于是有

$$P_0^{-1} N_2' N_1' Q' J Q N_1 N_2 P_0^{-1\prime} = J,$$

这表明 $L = QN_1N_2P_0^{-1\prime}$ 是 Lorentz 方阵．用

$$N_1 N_2 P_0'^{-1} \text{与} (N_1 N_2 P_0'^{-1})^{-1}$$

分别从右与左边去乘(3.5.20)得出

$$L^{-1}(JT)L = I_0' \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} P_0$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_3 + \frac{\varepsilon}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda_3 - \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

III.

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

由 (3.5.21) 和 (3.5.22) 可知

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c & f \\ d & c & f & g \end{pmatrix}, \text{其中 } d=0, \text{ 当 } \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

$$N=\begin{pmatrix} \eta_{00} & 0 & 0 & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ 0 & 0 & \eta_{11} & \eta_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{11} \end{pmatrix}, \text{其中 } \eta_{03}=\eta_{10}=0 \text{ 当 } \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

由 $\det A=-ac^3<0$ 可知 $a\neq 0$，$c\neq 0$，取

$$N_1=\begin{pmatrix} |a|^{-\frac{1}{2}} & \left(0, \ 0, \ -\dfrac{d}{a}\right) \\ 0 & \\ 0 & I^{(3)} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

这是与K可交换的。

$$N_1'AN_1=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c & f \\ 0 & c & f & h \end{pmatrix}, \ h=g-\frac{d^2}{a}, \ \varepsilon=\pm 1.$$

取

$$N_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

则 N_2 与K可交换，并且有

$$N_2'N_1'AN_1N_2=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & cx^2\\ 0 & 0 & cx^2 & 2cxy+fx^2\\ 0 & cx^2 & 2cxy+fx^2 & 2cxz+2fxy+cy^2+hx^2\end{pmatrix}.$$

取 x, y, z 使

$$cx^2=\varepsilon_1(\varepsilon_1=\pm1),\quad (2cy+fx)x=0,\quad 2cxz+2fxy+cy^2+hx^2=0,$$
便有

$$N_2'N_1'AN_1N_2=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 $\det A=-\varepsilon\varepsilon_1^3=-\varepsilon\varepsilon_1<0$，必须

$$\varepsilon\varepsilon_1=1.$$

取 P_0 为

$$P_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

显而易见

$$P_0'N_2'N_1'AN_1N_2P_0=\begin{pmatrix}-\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}.$$

由于 A 的号差为 -2，必须

$$\varepsilon=\varepsilon_1=-1.$$

上式即

$$P_0'N_2'N_1'Q'JQN_1N_2P_0=J,$$

这证明 $L=QN_1N_2P_0$ 是 Lorentz 方阵，因而有

$$L^{-1}(JT)L = P_0^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P_0$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

IV.

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0.$$

由(3.5.21)和(3.5.22)可知

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & f & -c \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0,\ 而\ b = 0\ 当\ \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$$N = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & 0 & 0 \\ \eta_{10} & \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{22} & \eta_{23} \\ 0 & 0 & -\eta_{23} & \eta_{22} \end{pmatrix}, 其中\ \eta_{01} = \eta_{10} = 0, 当\ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

由于 $\det A = -(ac - b^2)(c^2 + f^2) < 0$，故

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

的行列式>0，A 的号差为-2，故 A_1 亦是，即 A_1 定负，可写

为

$$A_1 = -N_0'N_0,\ \text{当}\ b = 0,\ \text{取}\ N_0\ \text{为对角形。}$$

取

$$N_1 = \begin{pmatrix} N_0^{-1} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

则 N_1 可与K交换，并且有

$$N'AN = \begin{pmatrix} -I^{(2)} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -2fxy+c(x^2-y^2) & 2cxy+f(x^2-y^2) \\ 2cxy+f(x^2-y^2) & 2fxy-c(x^2-y^2) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

取 x, y 使

$$-2fxy + c(x^2 - y^2) = 1,\ 2cxy + f(x^2 - y^2) = 0,$$

便有

$$N'Q'JQN = \begin{pmatrix} -I^{(2)} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = P_0JP_0',$$

其中

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

这表明 $L = QNP_0$ 是 Lorentz 方阵，而

$$L^{-1}(JT)L = P_0^{-1}KP_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

至此，定理完全得证。

值得注意的是，定理中 II_ε 包括 II_1 与 II_{-1} 两种标准型。彼此是不等价的，即不存在 Lorentz 方阵 L 使得

$$L^{-1}T_1L = T_2,$$

其中

$$T_1=\begin{pmatrix}\lambda_3+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \lambda_3-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

$$T_2=\begin{pmatrix}\lambda_3-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \lambda_3+\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

这可证明如下：若有一 Lorentz 方阵

$$L=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

使得 $T_1L=LT_2$, 则有

$$\begin{pmatrix}\lambda_3+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda_3-\frac{1}{2}\end{pmatrix}A=A\begin{pmatrix}\lambda_3-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda_3+\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_3+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda_3-\frac{1}{2}\end{pmatrix}B=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda_3\end{pmatrix}C=\frac{1}{2}C\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}D=D\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

由此可知，必须有

$$A=\begin{pmatrix}\frac{b+c}{2} & b\\ c & \frac{b+c}{2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x & y\\ x & y\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}z & z\\ t & t\end{pmatrix},$$

因此

$$L=\begin{pmatrix}\frac{b+c}{2} & b & x & y\\ c & \frac{b+c}{2} & x & y\\ z & z & d & e\\ t & t & f & g\end{pmatrix}.$$

由于 L 是 Lorentz 方阵，它必须适合下面条件

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-b^2-x^2-y^2=1,$$

$$c^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-x^2-y^2=-1,$$

$$\frac{b+c}{2}c-\frac{b+c}{2}b-x^2-y^2=0,$$

$$\frac{b+c}{2}b-\frac{b+c}{2}c-z^2-t^2=0.$$

末两式相加可得 $x^2+y^2+z^2+t^2=0$，必须 $x=y=z=t=0$，因而有 $b^2=c^2$. 如 $b=-c$，不符合第一个方程；如 $b=c$，不符合第二个方程. 因此 L 是不存在的.

参 考 文 献

[1] R. Penrose, A spinor approach to general relativity, *Ann. Phys.* (N. Y.), **10**, 171 (1960).
[2] A. Z. Petrov, *Sci. Not. Kazan State Univ.*, **114**, 55 (1954).
[3] A. Z. Petrov, Dissertation, Moscow State University (1957).
[4] A. Z. Petrov, Einstein Spaces, Oxford, Porgamon Pr. (1964).
[5] F. A. E. Pirani, Introduction to gravitation radiation theory, Brandeis Summer Institute in Theoretical Phys., vol. 1, 249 (1964).
[6] 马尔采夫(柯召译), 线性代数基础, 北京, 高教 (1955).
[7] 陆启铿, 旋量分析与引力辐射(讲义) (1970).

第四章 N-P 方程

§4.1 拟正交标架

设 g_{ij} 是 R^4 的开集 V 中的对称的号差为-2 的可微分的二阶协变张量. 由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_0' \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} P_0, \tag{4.1.1}$$

其中

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.2}$$

故存在标架 $\{e^j_{(a)}\}$ 使得

$$\begin{aligned} g_{jk} &= e_j^{(0)} e_k^{(1)} + e_j^{(1)} e_k^{(0)} - e_j^{(2)} e_k^{(3)} - e_j^{(3)} e_k^{(2)} \\ &= \eta_{ab} e_j^{(a)} e_k^{(b)}, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

其中

$$J = (\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.4}$$

而 $e_j^{(0)}$ 与 $e_j^{(1)}$ 是实的协变向量,

$$e_j^{(3)} = \overline{e_j^{(2)}} \tag{4.1.5}$$

是复的协变向量，标架 $\{e^j_{(a)}\}$ 有同样的性质，即 $e^j_{(0)}$ 与 $e^j_{(1)}$ 是实的，$e^j_{(3)}=\overline{e^j_{(2)}}$ 是复的，这样的标架称为拟正交标架。

对于拟正交标架的变换

$$\widetilde{e}^{(a)}_j = l^a_b e^{(b)}_j \tag{4.1.6}$$

有如下性质：$L=(l^a_b)$. 满足

$$L'JL=J. \tag{4.1.7}$$

所有满足上面关系的方阵成一群 $SO_1(1,3)$，它与 $SO(1,3)$ 同构，其同构关系为

$$L\mapsto P_0^{-1}LP_0,\quad L\in SO_1(1,3).$$

设 ξ_a 是对于拟正交标架 $\{e^j_{(a)}\}$ 的协变向量，则 ξ_0,ξ_3 为实，$\xi_2=\overline{\xi_3}$ 为复. 令

$$\xi_{11}=\xi_0,\xi_{21}=\xi_3,\xi_{22}=\xi_1,\xi_{12}=\xi_2,$$

则方阵

$$(\xi_{AB})_{1<A,B<2}=\xi_a\sigma^a$$

是一厄米方阵，其中 $\sigma^a=(\sigma^a_{AB})_{1<A,B<2}$ 是下述的方阵：

$$\sigma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\sigma^1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\sigma^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\sigma^3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}. \tag{4.1.8}$$

由上述不难看出，§ 2.4 和第三章关于旋量运算的结果仍然成立，并且由 (4.1.7) 及定理 2.4.1 可知，映照

$$\mathfrak{A}\to L=(K_0P_0^{-1})^{-1}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{A})(K_0P_0^{-1}),\mathfrak{A}\in SL(2,C). \tag{4.1.9}$$

由(2.4.27)与(4.1.2)可知，上式即

$$\mathfrak{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{A})\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}. \tag{4.1.10}$$

熟知SL (2,C) 可以由如下的方阵生成

$$\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & A^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, A>0;\ \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B\text{为复数};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

它们经(4.1.10)分别对应于

(i)类时旋转

$$L=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1.11}$$

或者相当于拟正交标架的变换

$$\begin{aligned} &\tilde{e}_j^{(0)}=Ae_j^{(0)},\ \tilde{e}_j^{(1)}=A^{-1}e_j^{(1)}, \\ &\tilde{e}_j^{(2)}=e_j^{(2)},\ \tilde{e}_j^{(3)}=e_j^{(3)}. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

(ii)类空旋转

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \tag{4.1.13}$$

或者

$$\begin{aligned} &\tilde{e}_j^{(0)}=e_j^{(0)},\ \tilde{e}_j^{(1)}=e_j^{(1)}, \\ &\tilde{e}_j^{(2)}=e^{i\theta}e_j^{(2)},\ \tilde{e}_j^{(3)}=e^{-i\theta}e_j^{(3)}. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

(iii)类光旋转

$$L=\begin{pmatrix} 1 & B\bar{B} & B & \bar{B} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B} & 1 & 0 \\ 0 & B & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1.15}$$

或者

$$\begin{cases} \tilde{e}_j^{(0)}=e_j^{(0)}+B\bar{B}e_j^{(1)}+Be_j^{(2)}+\bar{B}e_j^{(3)},\tilde{e}_j^{(1)}=e_j^{(1)}, \\ \tilde{e}_j^{(2)}=\bar{B}e_j^{(1)}+e_j^{(2)},\tilde{e}_j^{(3)}=Be_j^{(1)}+e_j^{(3)}. \end{cases} \tag{4.1.16}$$

(iv)

$$L=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad(4.1.17)$$

或者

$$\tilde{e}_j^{(0)}=e_j^{(1)},\tilde{e}_j^{(1)}=e_j^{(0)},\tilde{e}_j^{(2)}=e_j^{(3)},\tilde{e}_j^{(3)}=e_j^{(2)}.\qquad(4.1.18)$$

由 V 的张量场 g_{ik} 可定义一黎曼联络，经(3.1.2)定义了一个 $SO_1(1,3)$ 型联络 Γ^a_{bj}，只要取 $\{e_j^{(a)}\}$ 为拟正交标架．再由(3.1.5)定义了一 $SL(2, C)$ 型联络 Γ^A_{Bj}，注意 $(\sigma^a_{AB})=\sigma^a$ 是由(4.1.8)定义．令

$$\Gamma_{ABCD}=\epsilon_{AE}\Gamma^E_{Bj}e^j_{(a)}\sigma^a_{CD}.$$

它对于拟正交标架变换

$$\tilde{e}_j^{(a)}=l^a_be_j^{(b)},L=(l^a_b)\in SO_1(1,3),\qquad(4.1.19)$$

相应有(2.4.30)成立，其中 $\mathfrak{A}=(\alpha^A_B)\in SL(2, C)$．对于此标架变换及(2.4.47)有

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ABCD}=&\Gamma_{PQRS}\alpha_A^{-1P}\alpha_B^{-1Q}\alpha_C^{-1R}\overline{\alpha_D^{-1S}}\\&-\epsilon_{PQ}\alpha_A^{-1P}(X_{EF}\alpha_B^{-1Q})\alpha_C^{-1E}\overline{\alpha_D^{-1F}},\end{aligned}\qquad(4.1.20)$$

其中

$$X_{EF}=\sigma^a_{EF}e^j_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^j}.\qquad(4.1.21)$$

因此，Γ_{ABCD} 的变换关系为

(i)类时旋转．$\mathfrak{A}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{1/2}&0\\0&A^{-1/2}\end{pmatrix}$，($A$ 为实)

$$\tilde{\Gamma}_{111\bar{1}}=A^2\Gamma_{111\bar{1}},\tilde{\Gamma}_{112\bar{1}}=A\Gamma_{112\bar{1}},\tilde{\Gamma}_{111\bar{2}}=A\Gamma_{111\bar{2}},\tilde{\Gamma}_{112\bar{2}}=\Gamma_{112\bar{2}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{121\bar{1}}=A\Gamma_{121\bar{1}}+\frac{1}{2}X_{1\bar{1}}A,\tilde{\Gamma}_{122\bar{1}}=\Gamma_{122\bar{1}}+\frac{1}{2}A^{-1}X_{2\bar{1}}A,$$

$$\tilde{\Gamma}_{121\bar{2}} = \Gamma_{121\bar{2}} + \frac{1}{2} A^{-1} X_{1\bar{2}} A, \tilde{\Gamma}_{122\bar{2}} = A^{-1} \Gamma_{122\bar{2}} + \frac{1}{2} A^{-2} X_{2\bar{2}} A, \tilde{\Gamma}_{221\bar{1}} = \Gamma_{221\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{222\bar{1}} = A^{-1} \Gamma_{222\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{221\bar{2}} = A^{-1} \Gamma_{221\bar{2}}, \tilde{\Gamma}_{222\bar{2}} = A^{-2} \Gamma_{222\bar{2}}. \tag{4.1.22}$$

(ii) 类空旋转. $\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$,

$$\tilde{\Gamma}_{111\bar{1}} = e^{i\theta} \Gamma_{111\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{112\bar{1}} = \Gamma_{112\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{111\bar{2}} = e^{2i\theta} \Gamma_{111\bar{2}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{112\bar{2}} = e^{i\theta} \Gamma_{112\bar{2}}, \tilde{\Gamma}_{121\bar{1}} = \Gamma_{121\bar{1}} + \frac{i}{2} X_{1\bar{1}} \theta,$$

$$\tilde{\Gamma}_{122\bar{1}} = e^{-i\theta} \Gamma_{122\bar{1}} + \frac{i}{2} e^{-i\theta} X_{2\bar{1}} \theta, \tilde{\Gamma}_{121\bar{2}} = e^{i\theta} \Gamma_{121\bar{2}} + \frac{i}{2} e^{i\theta} X_{1\bar{2}} \theta,$$

$$\tilde{\Gamma}_{122\bar{2}} = \Gamma_{122\bar{2}} + \frac{i}{2} X_{2\bar{2}} \theta, \tilde{\Gamma}_{221\bar{1}} = e^{-i\theta} \Gamma_{221\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{222\bar{1}} = e^{-2i\theta} \Gamma_{222\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{221\bar{2}} = \Gamma_{221\bar{2}},, \tilde{\Gamma}_{222\bar{2}} = e^{-i\theta} \Gamma_{222\bar{2}}. \tag{4.1.23}$$

(iii) 类光旋转. $\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\tilde{\Gamma}_{111\bar{1}} = \Gamma_{111\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{112\bar{1}} = \Gamma_{112\bar{1}} - B \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{111\bar{2}} = \Gamma_{111\bar{2}} - \bar{B} \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{112\bar{2}} = \Gamma_{112\bar{2}} - B \Gamma_{111\bar{2}} - \bar{B} \Gamma_{112\bar{1}} + B \bar{B} \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{121\bar{1}} = \Gamma_{121\bar{1}} - B \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{122\bar{1}} = \Gamma_{122\bar{1}} - B \Gamma_{112\bar{1}} - B \Gamma_{121\bar{1}} + B^2 \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{121\bar{2}} = \Gamma_{121\bar{2}} - B \Gamma_{111\bar{2}} - \bar{B} \Gamma_{121\bar{1}} + B \bar{B} \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{122\bar{2}} = \Gamma_{122\bar{2}} - B(\Gamma_{112\bar{2}} + \Gamma_{121\bar{2}}) - \bar{B} \Gamma_{122\bar{1}} + B^2 \Gamma_{111\bar{2}} + B \bar{B} (\Gamma_{112\bar{1}} + \Gamma_{121\bar{1}}) - B^2 \bar{B} \Gamma_{111\bar{1}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{221\bar{1}} = \Gamma_{221\bar{1}} - 2B \Gamma_{211\bar{1}} + B^2 \Gamma_{111\bar{1}} - X_{1\bar{1}} B,$$

$$\tilde{\Gamma}_{221\bar{2}} = \Gamma_{221\bar{2}} - 2B \Gamma_{121\bar{2}} - \bar{B} \Gamma_{221\bar{1}} + B^2 \Gamma_{111\bar{2}} + 2B \bar{B} \Gamma_{121\bar{1}} - B^2 \bar{B} \Gamma_{111\bar{1}} - X_{1\bar{2}} B + \bar{B} X_{1\bar{1}} B,$$

$$\tilde{\Gamma}_{222\bar{1}} = \Gamma_{222\bar{1}} - B(2\Gamma_{122\bar{1}} + \Gamma_{221\bar{1}}) + B^2 (2\Gamma_{121\bar{1}} + \Gamma_{112\bar{1}}) - (X_{2\bar{1}} - B X_{1\bar{1}}) B - B^3 \Gamma_{111\bar{1}}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{222\bar{2}} = \Gamma_{222\bar{2}} - B(2\Gamma_{122\bar{2}} + \Gamma_{221\bar{2}}) - \bar{B}\Gamma_{222\bar{1}} + B^2(\Gamma_{112\bar{2}} \\
+ 2\Gamma_{121\bar{2}}) + B\bar{B}(2\Gamma_{122\bar{1}} + \Gamma_{221\bar{1}}) - B^3\Gamma_{111\bar{2}} \\
- B^2\bar{B}(\Gamma_{112\bar{1}} + 2\Gamma_{121\bar{1}}) + B^3\bar{B}\Gamma_{111\bar{1}} - (X_{2\bar{2}} \\
- BX_{1\bar{2}} - \bar{B}X_{2\bar{1}} + \bar{B}BX_{1\bar{1}})B.
\end{aligned}
\tag{4.1.24}
$$

(iv) 倒换. $\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}_{111\bar{1}} = -\Gamma_{222\bar{2}}, \tilde{\Gamma}_{112\bar{1}} = -\Gamma_{221\bar{2}}, \tilde{\Gamma}_{111\bar{2}} = -\Gamma_{222\bar{1}}, \\
&\tilde{\Gamma}_{112\bar{2}} = -\Gamma_{221\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{121\bar{1}} = -\Gamma_{212\bar{2}}, \tilde{\Gamma}_{122\bar{1}} = -\Gamma_{211\bar{2}}, \\
&\tilde{\Gamma}_{121\bar{2}} = -\Gamma_{212\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{122\bar{2}} = -\Gamma_{211\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{221\bar{1}} = -\Gamma_{112\bar{2}}, \\
&\tilde{\Gamma}_{222\bar{1}} = -\Gamma_{111\bar{2}}, \tilde{\Gamma}_{221\bar{2}} = -\Gamma_{112\bar{1}}, \tilde{\Gamma}_{222\bar{2}} = -\Gamma_{111\bar{1}}.
\end{aligned}
$$

为方便起见，我们令

$$
D = X_{1\bar{1}} = e^i_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \Delta = X_{2\bar{2}} = e^i_{(1)}\frac{\partial}{\partial x^i},
$$

$$
\delta = X_{1\bar{2}} = e^i_{(2)}\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \bar{\delta} = X_{2\bar{1}} = e^i_{(3)}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.1.25}
$$

并沿用 Newman-Penrose 的符号把 $\Gamma_{ABC\bar{D}}$ 写为

$-\Gamma_{ABC\bar{D}} =$ (4.1.26)

$C\bar{D}$ \ AB	11	12 或 21	22
$1\bar{1}$	κ	ε	π
$2\bar{1}$	ρ	α	λ
$1\bar{2}$	σ	β	μ
$2\bar{2}$	τ	γ	ν

于是 $\Gamma_{ABC\bar{D}}$ 的变换关系可写为

(i) 类时旋转

$\tilde{\kappa} = A^2\kappa, \tilde{\varepsilon} = A\varepsilon + \frac{1}{2}DA, \tilde{\pi} = \pi,$

$$\tilde{\rho} = A\rho,\ \tilde{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}A^{-1}\delta A,\ \tilde{\lambda} = A^{-1}\lambda,$$

$$\tilde{\sigma} = A\sigma,\ \tilde{\beta} = \beta + \frac{1}{2}A^{-1}\delta A,\ \tilde{\mu} = A^{-1}\mu,$$

$$\tilde{\tau} = \tau,\ \tilde{\gamma} = A^{-1}\gamma + \frac{1}{2}A^{-2}\Delta A,\ \tilde{\nu} = A^{-2}\nu. \tag{4.1.27}$$

(ii) 类空旋转

$$\tilde{\kappa} = e^{i\theta}\kappa,\ \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{i}{2}D\theta,\ \tilde{\pi} = e^{-i\theta}\pi,$$

$$\tilde{\rho} = \rho,\ \tilde{\alpha} = e^{-i\theta}\left(\alpha + \frac{i}{2}\bar{\delta}\theta\right),\ \tilde{\lambda} = e^{-2i\theta}\lambda,$$

$$\tilde{\sigma} = e^{2i\theta}\sigma,\ \tilde{\beta} = e^{i\theta}\left(\beta + \frac{i}{2}\delta\theta\right),\ \tilde{\mu} = \mu,$$

$$\tilde{\tau} = e^{i\theta}\tau,\ \tilde{\gamma} = \gamma + \frac{i}{2}\Delta\theta,\ \tilde{\nu} = e^{-i\theta}\nu. \tag{4.1.28}$$

(iii) 类光旋转

$$\tilde{\kappa} = \kappa,\ \tilde{\sigma} = \sigma - \bar{B}\kappa,\ \tilde{\rho} = \rho - B\kappa,$$
$$\tilde{\tau} = \tau - B\sigma - \bar{B}\rho + B\bar{B}\kappa,\ \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - B\kappa,$$
$$\tilde{\alpha} = \alpha - B(\rho + \varepsilon) + B^2\kappa,$$
$$\tilde{\beta} = \beta - B\sigma - \bar{B}\varepsilon + B\bar{B}\kappa,$$
$$\tilde{\gamma} = \gamma - B(\tau + \beta) - \bar{B}\alpha + B^2\sigma + B\bar{B}(\rho + \varepsilon) - B^2\bar{B}\kappa,$$
$$\tilde{\pi} = \pi - 2B\varepsilon + B^2\kappa - DB,$$
$$\tilde{\lambda} = \lambda - B(2\alpha + \pi) + B^2(2\varepsilon + \rho) - B^3\kappa - (\bar{\delta} - BD)B,$$
$$\tilde{\mu} = \mu - 2B\beta - \bar{B}\pi + B^2\sigma + 2B\bar{B}\varepsilon - B^2\bar{B}\kappa - (\delta - \bar{B}D)B,$$
$$\tilde{\nu} = \nu - B(2\gamma + \mu) - \bar{B}\lambda + B^2(\tau + 2\beta)$$

$$+ B\bar{B}(2\alpha + \pi) - B^3\sigma - B^2\bar{B}(\rho + 2\epsilon)$$
$$+ B^3\bar{B}\kappa - (\Delta - B\delta - \bar{B}\bar{\delta} + B\bar{B}D)B. \quad (4.1.29)$$

(iv)倒换

$\tilde{\kappa} = -\nu$, $\tilde{\epsilon} = -\gamma$, $\tilde{\pi} = -\tau$, $\tilde{\rho} = -\mu$,

$\tilde{\alpha} = -\beta$, $\tilde{\lambda} = -\sigma$, $\tilde{\sigma} = -\lambda$, $\tilde{\beta} = -\alpha$,

$\tilde{\mu} = -\rho$, $\tilde{\tau} = -\pi$, $\tilde{\gamma} = -\epsilon$, $\tilde{\nu} = -\kappa$.

§ 4.2 Einstein 方程的旋量形式

Einstein 的引力场方程对于拟正交标架为

$$R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R = T_{ab} \quad (4.2.1)$$

把它写为旋量的形式即

$$R_{A\bar{C}B\bar{D}} - \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}R = T_{A\bar{C}B\bar{D}}, \quad (4.2.2)$$

其中

$$T_{A\bar{C}B\bar{D}} = T_{ab}\sigma^a_{A\bar{C}}\sigma^b_{B\bar{D}} \quad (4.2.3)$$

是能量-动量张量的旋量形式.

利用 $T_{A\bar{C}B\bar{D}} = T_{B\bar{D}A\bar{C}}$ 可知

$$T_{A\bar{C}B\bar{D}} = \frac{1}{2}(T_{A\bar{C}B\bar{D}} + T_{B\bar{C}A\bar{D}}) + \frac{1}{2}(T_{A\bar{C}B\bar{D}} - T_{B\bar{C}A\bar{D}})$$
$$= \frac{1}{2}(T_{A\bar{C}B\bar{D}} + T_{B\bar{C}A\bar{D}}) + \frac{1}{4}T\epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}, \quad (4.2.4)$$

其中

$$T = T^{A\bar{C}}{}_{A\bar{C}}. \quad (4.2.5)$$

因此据(3.1.20)可知方程(4.2.2)即

$$\varphi_{AB\bar{C}\bar{D}} = -\frac{1}{4}(T_{A\bar{C}B\bar{D}} + T_{B\bar{C}A\bar{D}}),$$

$$\frac{1}{2}(\chi^{AC}{}_{AC}+\overline{\chi^{AC}{}_{AC}})=-\frac{1}{4}T. \tag{4.2.6}$$

另一方面，据(3.4.4)可知，Weyl 张量能利用 Einstein 方程可写为

$$C_{abcd}=R_{abcd}+\frac{1}{2}(\eta_{ac}T_{bd}-\eta_{cb}T_{ad}-\eta_{ad}T_{bc}+\eta_{bd}T_{ac})$$
$$+\frac{R}{3}(\eta_{ac}\eta_{bd}-\eta_{cb}\eta_{ad}).$$

把上式写为旋量形式，即

$$C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}}=R_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}}-\frac{1}{2}(\epsilon_{AC}\epsilon_{\bar{E}\bar{G}}T_{B\bar{F}D\bar{H}}$$
$$-\epsilon_{AD}\epsilon_{\bar{E}\bar{H}}T_{B\bar{F}C\bar{G}}+\epsilon_{BD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}}T_{A\bar{E}C\bar{G}}-\epsilon_{BC}\epsilon_{\bar{F}\bar{G}}T_{A\bar{E}D\bar{H}})$$
$$+\frac{R}{3}(\epsilon_{AD}\epsilon_{\bar{E}\bar{H}}\epsilon_{BC}\epsilon_{\bar{F}\bar{G}}-\epsilon_{AC}\epsilon_{\bar{E}\bar{G}}\epsilon_{BD}\epsilon_{\bar{F}\bar{H}}).$$

用 $\epsilon^{\bar{E}\bar{F}}\epsilon^{\bar{G}\bar{H}}$ 乘上式，并据(3.1.17)，(3.1.22)可知

$$4\Psi_{ABCD}=4\chi_{ABCD}-\frac{1}{2}(\epsilon_{AC}T_{B}{}^{\bar{F}}{}_{D\bar{F}}+\epsilon_{AD}T_{B}{}^{\bar{F}}{}_{C\bar{F}}$$
$$+\epsilon_{BD}T_{A}{}^{\bar{F}}{}_{C\bar{F}}+\epsilon_{BC}T_{A}{}^{\bar{F}}{}_{D\bar{F}})$$
$$+\frac{R}{3}(-2\epsilon_{AD}\epsilon_{BC}-2\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}).$$

由于 $T_{C}{}^{\bar{F}}{}_{D\bar{F}}=\frac{1}{2}\epsilon_{CD}T$，及由 $R=-T$ 和(4.2.6) 可知，

上式即

$$\Psi_{ABCD}=\chi_{ABCD}+\frac{T}{24}(\epsilon_{AD}\epsilon_{BC}+\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}). \tag{4.2.7}$$

应用(3.1.40) 可得

$$-X_{A\bar{E}}\Gamma_{CDB\bar{F}}+X_{B\bar{F}}\Gamma_{CDA\bar{E}}$$

$$
= -\Gamma_{DGB\bar{F}}\varepsilon^{HG}\Gamma_{HCA\bar{E}}+\Gamma_{DGA\bar{E}}\varepsilon^{HG}\Gamma_{HCB\bar{F}}-\Gamma_{CDG\bar{F}}\varepsilon^{HG}\Gamma_{HBA\bar{E}}
+\Gamma_{CDG\bar{E}}\varepsilon^{HG}\Gamma_{HAB\bar{F}}-\Gamma_{CDB\bar{H}}\varepsilon^{GH}\overline{\Gamma_{GFEA}}+\Gamma_{CDA\bar{H}}\varepsilon^{GH}\overline{\Gamma_{GEFB}}
+\Psi_{CDAB}\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}+\varphi_{CD\bar{E}\bar{F}}\varepsilon_{AB}-\frac{T}{24}\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}(\varepsilon_{DB}\varepsilon_{CA}+\varepsilon_{DA}\varepsilon_{CB}). \tag{4.2.8}
$$

应用(4.1.25)和(4.1.26)的符号，上面的方程可写为

$$
D\rho-\bar{\delta}\kappa=\rho^2+\sigma\bar{\sigma}+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\rho-\bar{\kappa}\tau-\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)+\varphi_{11\bar{1}\bar{1}}. \tag{4.2.9}
$$

$$
D\sigma-\delta\kappa=(\rho+\bar{\rho})\sigma+(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\sigma-(\tau-\bar{\pi}+3\beta+\bar{\alpha})\kappa+\Psi_{1111}. \tag{4.2.10}
$$

$$
D\tau-\Delta\kappa=(\tau+\bar{\pi})\rho+(\bar{\tau}+\pi)\sigma+(\varepsilon-\bar{\varepsilon})\tau-(3\gamma+\bar{\gamma})\kappa+\Psi_{1112}+\varphi_{11\bar{1}\bar{2}}. \tag{4.2.11*}
$$

$$
D\alpha-\bar{\delta}\varepsilon=(\rho+\bar{\varepsilon}-2\varepsilon)\alpha+\beta\bar{\sigma}-\bar{\beta}\varepsilon-\bar{\kappa}\lambda-\kappa\gamma+(\varepsilon+\rho)\pi+\varphi_{12\bar{1}\bar{1}}. \tag{4.2.12}
$$

$$
D\beta-\delta\varepsilon=(\alpha+\pi)\sigma+(\bar{\rho}-\bar{\varepsilon})\beta-(\mu+\gamma)\kappa-(\bar{\alpha}-\bar{\pi})\varepsilon+\Psi_{1112}. \tag{4.2.13}
$$

$$
D\gamma-\Delta\varepsilon=(\tau+\bar{\pi})\alpha+(\bar{\tau}+\pi)\beta-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\gamma-(\gamma+\bar{\gamma})\varepsilon+\tau\pi-\nu\kappa+\Psi_{1122}+\varphi_{12\bar{1}\bar{2}}+\frac{T}{24}. \tag{4.2.14}
$$

$$
D\lambda-\bar{\delta}\pi=\rho\lambda+\bar{\sigma}\mu+\pi^2+(\alpha-\bar{\beta})\pi-\nu\bar{\kappa}-(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\lambda+\varphi_{22\bar{1}\bar{1}}. \tag{4.2.15}
$$

$$
D\mu-\delta\pi=\bar{\rho}\mu+\sigma\lambda+\pi\bar{\pi}-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\mu-\pi(\bar{\alpha}-\beta)-\nu\kappa+\Psi_{1122}-\frac{T}{12}. \tag{4.2.16}
$$

$$
D\nu-\Delta\pi=(\pi+\bar{\tau})\mu+(\bar{\pi}+\tau)\lambda+(\gamma-\bar{\gamma})\pi-(3\varepsilon+\bar{\varepsilon})\nu+\Psi_{1222}+\varphi_{22\bar{1}\bar{2}}. \tag{4.2.17*}
$$

$$
\Delta\lambda-\bar{\delta}\nu=-(\mu+\bar{\mu})\lambda-(3\gamma-\bar{\gamma})\lambda+(3\alpha+\bar{\beta}+\pi-\bar{\tau})\nu-\Psi_{2222}. \tag{4.2.18}
$$

$$
\delta\rho-\bar{\delta}\sigma=\rho(\bar{\alpha}+\beta)-\sigma(3\alpha-\bar{\beta})+(\rho-\bar{\rho})\tau
$$

$$+(\mu-\bar{\mu})\kappa-\Psi_{1112}+\varphi_{11\bar{1}\bar{2}}. \quad (4.2.19)^*$$

$$\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=\mu\rho-\lambda\sigma+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta+\gamma(\rho-\bar{\rho})$$

$$+\varepsilon(\mu-\bar{\mu})-\Psi_{1122}-\frac{T}{24}+\varphi_{12\bar{1}\bar{2}}. \quad (4.2.20)$$

$$\delta\lambda-\bar{\delta}\mu=(\rho-\bar{\rho})\nu+(\mu-\bar{\mu})\pi+\mu(\alpha+\bar{\beta})$$

$$+\lambda(\bar{\alpha}-3\beta)-\Psi_{1222}+\varphi_{22\bar{1}\bar{2}}. \quad (4.2.21)^*$$

$$\delta\nu-\Delta\mu=\mu^2+\lambda\bar{\lambda}+(\gamma+\bar{\gamma})\mu-\bar{\nu}\pi+(\tau-3\beta$$

$$-\bar{\alpha})\nu+\varphi_{22\bar{2}\bar{2}}. \quad (4.2.22)$$

$$\delta\gamma-\Delta\beta=(\tau-\bar{\alpha}-\beta)\gamma+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\bar{\nu}$$

$$-\beta(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)+\alpha\bar{\lambda}+\varphi_{12\bar{2}\bar{2}}. \quad (4.2.23)$$

$$\delta\tau-\Delta\sigma=\mu\sigma+\bar{\lambda}\rho+(\tau+\beta-\bar{\alpha})\tau-(3\gamma-\bar{\gamma})\sigma$$

$$-\kappa\bar{\nu}+\varphi_{11\bar{2}\bar{2}}. \quad (4.2.24)^*$$

$$\Delta\rho-\bar{\delta}\tau=-(\rho\bar{\mu}+\sigma\lambda)+(\bar{\beta}-\alpha-\bar{\tau})\tau$$

$$+(\gamma+\bar{\gamma})\rho+\nu\kappa-\Psi_{1122}+\frac{T}{12}. \quad (4.2.25)^*$$

$$\Delta\alpha-\bar{\delta}\gamma=(\rho+\varepsilon)\nu-(\tau+\beta)\lambda+(\bar{\gamma}-\bar{\mu})\alpha$$

$$+(\bar{\beta}-\bar{\tau})\gamma-\Psi_{1222}. \quad (4.2.26)$$

以上 18 个方程称为 N-P 方程 (Newman-Penrose[5]),注意其中 $\varphi_{AB\bar{C}\bar{D}}$ 由方程 (4.1.6) 来决定.

若已与 $\varphi_{AB\bar{C}\bar{D}}$,则 N-P 方程是首先解出 $\Gamma_{ABC\bar{D}}$,然后再设法从已知的 $\Gamma_{ABC\bar{D}}$ 解出拟正交标架 $e^i_{(a)}$. 后者要利用交换子

$$X_aX_b-X_bX_a=\left(e^i_{(a)}\frac{\partial e^k_{(b)}}{\partial x^i}-e^i_{(b)}\frac{\partial e^k_{(a)}}{\partial x^i}\right)e^{(e)}_kX_e.$$

根据(3.1.37),上式即

$$X_aX_b-X_bX_a=(\Gamma^e_{bk}e^k_{(a)}-\Gamma^e_{ak}e^k_{(b)})X_e.$$

应用 (3.1.38) 的计算可知,上式可化为旋量形式

$$X_{C\bar{E}}X_{D\bar{F}}-X_{D\bar{F}}X_{C\bar{E}}=(\Gamma^d_{bk}e^k_{(a)}-\Gamma^d_{ak}e^k_{(b)})\sigma^a_{C\bar{E}}\sigma^b_{D\bar{F}}\sigma^{G\bar{H}}_dX_{G\bar{H}}$$

$$= [(\overline{\delta_F^H \Gamma_{Dj}^G} + \delta_D^G \overline{\Gamma_{Fj}^H}) e^j_{(a)} \sigma^a_{C\bar{E}} - (\overline{\delta_E^H} \Gamma_{Cj}^G$$

$$+ \delta_C^G \overline{\Gamma_{Ej}^H}) e^j_{(a)} \sigma^a_{D\bar{F}}] X_{G\bar{H}}$$

$$= \Gamma^G{}_{DC\bar{E}} X_{G\bar{F}} - \Gamma^G{}_{CD\bar{F}} X_{G\bar{E}}$$

$$+ \overline{\Gamma^H{}_{FE\bar{C}}} X_{D\bar{H}} - \overline{\Gamma^H{}_{EF\bar{D}}} X_{C\bar{H}},$$

此即

$$-X_{C\bar{E}} X_{D\bar{F}} + X_{D\bar{F}} X_{C\bar{E}}$$

$$= \Gamma_{2DC\bar{E}} X_{1\bar{F}} - \Gamma_{1DC\bar{E}} X_{2\bar{F}} - \Gamma_{2CD\bar{F}} X_{1\bar{E}} + \Gamma_{1CD\bar{F}} X_{2\bar{E}}$$

$$+ \overline{\Gamma_{2FE\bar{C}}} X_{D\bar{1}} - \overline{\Gamma_{1FE\bar{C}}} X_{D\bar{2}} - \overline{\Gamma_{2EF\bar{D}}} X_{C\bar{1}} + \overline{\Gamma_{1EF\bar{D}}} X_{C\bar{2}}.$$

应用(4.1.25)和(4.1.26)的符号可知，上式可写为

$$\Delta D - D\Delta = (\gamma + \bar{\gamma})D + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta}$$
$$- (\bar{\tau} + \pi)\delta. \qquad (4.2.27)$$

$$\delta D - D\delta = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta}$$
$$- (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\delta. \qquad (4.2.28)$$

$$\delta\Delta - \Delta\delta = -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \bar{\lambda}\bar{\delta}$$
$$+ (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta. \quad (4.2.29)$$

$$\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} = -(\mu - \bar{\mu})D - (\rho - \bar{\rho})\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta}$$
$$+ (\alpha - \bar{\beta})\delta. \quad (4.2.30)$$

把上面算子作用于 x^k，据(4.1.25)有

$$\Delta e^k_{(0)} - D e^k_{(1)} = (\gamma + \bar{\gamma}) e^k_{(0)} + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) e^k_{(1)}$$
$$- (\tau + \bar{\pi}) \overline{e^k_{(2)}} - (\bar{\tau} + \pi) e^k_{(2)}. \quad (4.2.31)$$

$$\delta e^k_{(0)} - D e^k_{(2)} = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) e^k_{(0)} + \kappa e^k_{(1)}$$
$$- (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}) e^k_{(2)} - \sigma \overline{e^k_{(2)}}. \qquad (4.2.32)$$

$$\delta e^k_{(1)} - \Delta e^k_{(2)} = -\bar{\nu} e^k_{(0)} + (\tau - \bar{\alpha} - \beta) e^k_{(1)}$$
$$+ (\mu - \gamma + \bar{\gamma}) e^k_{(2)} + \bar{\lambda} \overline{e^k_{(2)}}. \qquad (4.2.33)$$

$$\bar{\delta} e^k_{(2)} - \delta \overline{e^k_{(2)}} = -(\mu - \bar{\mu}) e^k_{(0)} - (\rho - \bar{\rho}) e^k_{(1)}$$
$$+ (\alpha - \bar{\beta}) e^k_{(2)} - (\bar{\alpha} - \beta) \overline{e^k_{(2)}}. \qquad (4.2.34)$$

此外，通常 Ψ_{ABCD} 是未知的或一部分是未知的，故还必须要知道 Ψ_{ABCD} 的方程。据 Bianchi 恒等式(3.1.42)，并由(4.2.7)

消去 χ_{ABCD} 得

$$\epsilon^{DI}\Psi_{ABCD;I\bar{G}} - \frac{1}{24}(\epsilon_{BC}T_{;A\bar{G}} + \epsilon_{AC}T_{;B\bar{G}})$$

$$= \epsilon^{\bar{H}\bar{J}}\varphi_{AB\bar{G}\bar{H};C\bar{J}}. \tag{4.2.35}$$

据协变微分的定义，上式即

$$\epsilon^{DI}(X_{I\bar{G}}\Psi_{ABCD} - \Psi_{SBCD}\epsilon^{RS}\Gamma_{RAI\bar{G}} - \Psi_{ASCD}\epsilon^{RS}\Gamma_{RBI\bar{G}} - \Psi_{ABSD}\epsilon^{RS}\Gamma_{RCI\bar{G}} - \Psi_{ABCS}\epsilon^{RS}\Gamma_{RDI\bar{G}})$$
$$= \epsilon^{\bar{H}\bar{J}}(X_{C\bar{J}}\varphi_{AB\bar{G}\bar{H}} - \varphi_{SB\bar{G}\bar{H}}\epsilon^{RS}\Gamma_{RAC\bar{J}} - \varphi_{AS\bar{G}\bar{H}}\epsilon^{RS}\Gamma_{RBC\bar{J}} - \varphi_{AB\bar{S}\bar{H}}\epsilon^{\bar{R}\bar{S}}\overline{\Gamma_{RGJC}} - \varphi_{AB\bar{G}\bar{S}}\epsilon^{\bar{R}\bar{S}}\overline{\Gamma_{RHJC}})$$
$$+ \frac{1}{24}(\epsilon_{BC}X_{A\bar{G}}T + \epsilon_{AC}X_{B\bar{G}}T). \tag{4.2.36}$$

由此得出

$$D\Psi_{1112} - \bar{\delta}\Psi_{1111} + (4\alpha - \pi)\Psi_{1111} - (2\epsilon + 4\rho)\Psi_{1112} + 3\kappa\Psi_{1122} = D\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} - \delta\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} + (2\bar{\alpha} + 2\beta - \bar{\pi})\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} - 2(\epsilon + \bar{\rho})\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} + \bar{\kappa}\varphi_{11\bar{2}\bar{2}} - 2\sigma\varphi_{12\bar{1}\bar{1}} + 2\kappa\varphi_{12\bar{1}\bar{2}}. \tag{4.2.37}$$

$$D\Psi_{1122} - \delta\Psi_{1121} - \frac{1}{12}DT + \lambda\Psi_{1111} + 2(\alpha - \pi)\Psi_{1112} - 3\rho\Psi_{1122} + 2\kappa\Psi_{1222} = \bar{\delta}\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} - \Delta\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} + (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} - 2(\alpha + \bar{\tau})\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} + \bar{\sigma}\varphi_{11\bar{2}\bar{2}} - 2\tau\varphi_{12\bar{1}\bar{1}} + 2\rho\varphi_{12\bar{1}\bar{2}}. \tag{4.2.38}$$

$$D\Psi_{1222} - \bar{\delta}\Psi_{1122} - \frac{1}{24}\bar{\delta}T + 2\lambda\Psi_{1112} - 3\pi\Psi_{1122} + 2(\epsilon - \rho)\Psi_{1122} + \kappa\Psi_{2222} = \bar{\delta}\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} - \Delta\varphi_{12\bar{1}\bar{1}} + \nu\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} - \lambda\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} + (2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\varphi_{12\bar{1}\bar{1}} - 2\bar{\tau}\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} + \bar{\sigma}\varphi_{12\bar{2}\bar{2}} - \tau\varphi_{22\bar{1}\bar{1}} + \rho\varphi_{22\bar{1}\bar{2}}. \tag{4.2.39}$$

$$D\Psi_{2222} - \bar{\delta}\Psi_{1222} + 3\lambda\Psi_{1122} - 2(\alpha + 2\pi)\Psi_{1222} + (4\epsilon - \rho)\Psi_{2222} = \bar{\delta}\varphi_{22\bar{1}\bar{2}} - \Delta\varphi_{22\bar{1}\bar{1}} + 2\nu\varphi_{12\bar{1}\bar{1}} - 2\lambda\varphi_{12\bar{1}\bar{2}}$$

$$+ (2\gamma - 2\nu - \bar{\mu})\varphi_{22\bar{1}\bar{1}} + 2(\alpha - \tau)\varphi_{22\bar{1}\bar{2}} + \bar{\delta}\varphi_{22\bar{2}\bar{2}}. \tag{4.2.40}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi_{1112} - \Delta\Psi_{1111} + (4\gamma - \mu)\Psi_{1111} - 2(\beta + 2\tau)\Psi_{1112} \\ + 3\sigma\Psi_{1122} = D\varphi_{11\bar{2}\bar{2}} - \delta\varphi_{11\bar{2}\bar{1}} + \bar{\lambda}\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} + 2(\beta - \bar{\pi})\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} \\ + (2\bar{\varepsilon} - 2\varepsilon - \bar{\rho})\varphi_{11\bar{2}\bar{2}} - 2\bar{\sigma}\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} + 2\kappa\varphi_{12\bar{2}\bar{2}}.\end{aligned} \tag{4.2.41}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi_{1122} - \Delta\Psi_{1112} - \frac{1}{12}\delta T + \nu\Psi_{1111} + 2(\gamma - \mu)\Psi_{1112} \\ - 3\tau\Psi_{1122} + 2\sigma\Psi_{1222} = \bar{\delta}\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} - \Delta\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} + \bar{\nu}\varphi_{11\bar{1}\bar{1}} \\ + 2(\gamma - \bar{\mu})\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} - (2\alpha - 2\bar{\beta} + \bar{\tau})\varphi_{11\bar{2}\bar{2}} - 2\tau\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} \\ + 2\rho\varphi_{12\bar{2}\bar{2}}.\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi_{1222} - \Delta\Psi_{1122} - \frac{1}{24}\Delta T + 2\nu\Psi_{1112} - 3\mu\Psi_{1122} \\ + 2(\beta - \tau)\Psi_{1222} + \sigma\Psi_{2222} = \bar{\delta}\varphi_{12\bar{2}\bar{2}} - \Delta\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} + \nu\varphi_{11\bar{1}\bar{2}} \\ - \lambda\varphi_{11\bar{2}\bar{2}} + \bar{\nu}\varphi_{12\bar{1}\bar{1}} - 2\bar{\mu}\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} + (2\bar{\beta} - \bar{\tau})\varphi_{12\bar{2}\bar{2}} \\ - \tau\varphi_{22\bar{1}\bar{2}} + \rho\varphi_{22\bar{2}\bar{2}}.\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi_{2222} - \Delta\Psi_{1222} + 3\nu\Psi_{1122} - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_{1222} \\ + (4\beta - \tau)\Psi_{2222} = \bar{\delta}\varphi_{22\bar{2}\bar{2}} - \Delta\varphi_{22\bar{1}\bar{2}} + 2\nu\varphi_{12\bar{1}\bar{2}} - 2\lambda\varphi_{12\bar{2}\bar{2}} \\ + \bar{\nu}\varphi_{22\bar{1}\bar{1}} - 2(\gamma + \bar{\mu})\varphi_{22\bar{1}\bar{2}} + (2\alpha + 2\bar{\beta} - \bar{\tau})\varphi_{22\bar{2}\bar{2}}.\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

*值得注意的是 N-P 方程共有 18 个，而独立的 $\Gamma_{ABC\bar{D}}$ 只有 12 个，可见有的方程可能是多余的．作者[6]曾指出过这个问题，后来蒋声[9]证明其中六个方程是多余的，即可用其它方程的线性组合得出． 实际上，由定理 3.1.4 及 (4.2.7) 可得出：

$$F_{ABC\bar{E}D\bar{F}} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}} + \varphi_{AB\bar{E}\bar{F}}\varepsilon_{CD} - \frac{T}{24}\varepsilon_{\bar{E}\bar{F}}(\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC} + \varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}).$$

由此可知

$$F_{112\bar{1}2\bar{2}}=\Psi_{1122}-\frac{T}{12}=F_{221\bar{1}1\bar{2}}. \qquad (4.2.45)$$

故(4.2.25)与(4.2.16)等价；

$$F_{111\bar{2}2\bar{2}}=\varphi_{11\bar{2}\bar{2}}=\overline{\varphi_{22\bar{1}\bar{1}}}=\overline{F_{221\bar{1}2\bar{1}}}, \qquad (4.2.46)$$

即(4.2.24)与(4.2.15)的复共轭等价；

$$F_{221\bar{1}2\bar{2}}=\Psi_{1222}+\varphi_{22\bar{1}\bar{2}}=F_{122\bar{1}2\bar{2}}+\overline{F_{121\bar{2}2\bar{2}}}, \qquad (4.2.47)$$

即(4.2.21)等价于(4.2.26)与(4.2.23)的复共轭之和；

$$F_{111\bar{1}2\bar{2}}=\Psi_{1112}+\varphi_{11\bar{1}\bar{2}}=F_{121\bar{1}1\bar{2}}+\overline{F_{121\bar{1}2\bar{1}}}, \qquad (4.2.48)$$

即(4.2.19)等价于(4.2.13)与(4.2.12)的复共轭之和；

$$F_{222\bar{1}1\bar{2}}=\Psi_{1222}-\varphi_{22\bar{1}\bar{2}}=F_{212\bar{1}2\bar{2}}-\overline{F_{121\bar{2}2\bar{2}}}, \qquad (4.2.49)$$

即(4.2.17)等价于(4.2.26)与(4.2.23)的复共轭之差；

$$F_{112\bar{2}1\bar{1}}=-\Psi_{1112}-\varphi_{11\bar{1}\bar{2}}=-F_{121\bar{1}1\bar{2}}-\overline{F_{121\bar{1}2\bar{1}}}, \qquad (4.2.50)$$

即(4.2.11)等价于(4.2.13)与(4.2.12)复共轭之和；

这说明 N-P 方程中去掉有*号的是独立的方程组。但我们具体解方程组时，往往用它们的另一线性组合会较方便，因此仍保存在原方程组之中。

§ 4.3 Goldberg-Sachs 定理

一真空引力场即 g_{ik} 满足(4.2.1)中 $T_{ab}=0$ 的方程，此时

$$R_{ab}=0,\ \varphi_{AB\bar{C}\bar{D}}=0,\ \chi_{ABCD}=\Psi_{ABCD}, \qquad (4.3.1)$$

及

$$C_{abcd}=R_{abcd}. \qquad (4.3.2)$$

一真空引力场称为代数上特殊的，即 Weyl 张量 C_{abcd} 不是 I 型或 O 型，亦即 Ψ_{ABCD} 不全为 0，且

$$\Psi_{ABCD}z^Az^Bz^Cz^D=0$$

不是只有单根．设根 $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A, \delta_A$ 中 $(\alpha_A) = (\beta_A) = (0,1)$，于是有

$$\Psi_{ABCD} = \kappa\alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)},$$

其中

$$\Psi_{1111} = 0, \Psi_{1112} = 0. \tag{4.3.3}$$

由(4.2.37)—(4.2.39)及(4.2.41)—(4.2.43)可知

$$\begin{aligned}
&3\kappa\Psi_{1122} = 0,\\
&D\Psi_{1122} - 3\rho\Psi_{1122} + 2\kappa\Psi_{1222} = 0,\\
&D\Psi_{1222} - \bar{\delta}\Psi_{1122} - 3\pi\Psi_{1122} + 2(\varepsilon - \rho)\Psi_{1222} + \kappa\Psi_{2222} = 0,\\
&3\sigma\Psi_{1122} = 0,\\
&\delta\Psi_{1122} - 3\tau\Psi_{1122} + 2\sigma\Psi_{1222} = 0,\\
&\delta\Psi_{1222} - \Delta\Psi_{1122} - 3\mu\Psi_{1122} + 2(\beta - \tau)\Psi_{1222} + \sigma\Psi_{2222} = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

由上式可知，如 σ 或 κ 不为 0，必须 $\Psi_{1122} = \Psi_{1222} = \Psi_{2222} = 0$，此时 Weyl 张量为 O 型，故真空的代数特殊的引力场必须 $\kappa = \sigma = 0$。

反之，如真空引力场中有 $\kappa = \sigma = 0$．作标架的类空旋转(4.1.28)，可知对新的标架

$$\tilde{\kappa} = e^{i\theta}\kappa, \frac{1}{i}(\tilde{\varepsilon} - \bar{\tilde{\varepsilon}}) = \frac{1}{i}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) + D\theta, \tilde{\sigma} = e^{2i\theta}\sigma.$$

对此标架仍然有 $\tilde{\kappa} = \tilde{\sigma} = 0$．现选取 θ 使

$$\frac{1}{i}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) + D\theta = 0.$$

由于 $D = e^i_{(0)}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，此一阶线性偏微分方程必有解 θ，故我们不妨假定原来的标架就有

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = 0.$$

作类时旋转(4.1.27)，有

$$\tilde{\kappa} = A^2\kappa, \tilde{\sigma} = A\sigma, \tilde{\varepsilon} + \bar{\tilde{\varepsilon}} = A(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + DA,$$
$$\tilde{\varepsilon} - \bar{\tilde{\varepsilon}} = A(\varepsilon - \bar{\varepsilon}).$$

我们选取 A 使

$$D\log A + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = 0,$$

即可选取标架使

$$\kappa = \sigma = \varepsilon = 0.$$

作类光旋转(4.1.29)，此时

$$\tilde{\kappa} = \kappa, \tilde{\sigma} = \sigma - \bar{B}\kappa, \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - B\kappa, \tilde{\tau} = \tau - \bar{B}\rho$$
$$- B\sigma + B\bar{B}\kappa.$$

如果 $\rho = 0$，则由(4.2.10)，(4.2.19)可知 $\Psi_{1111}=0, \Psi_{1112}=0$，即 Weyl 张量是代数特殊的。如 $\rho \neq 0$，我们选取 $\bar{B}$ 使

$$\tau = \bar{B}\rho.$$

此时，有 $\tilde{\kappa} = \tilde{\sigma} = \tilde{\varepsilon} = \tilde{\tau} = 0$，我们不妨假定原来标架就有

$$\kappa = \sigma = \varepsilon = \tau = 0.$$

由(4.2.9),(4.2.10),(4.2.11),(4.2.13),(4.2.19)可知

$$D\rho = \rho^2, \Psi_{1111} = 0, \Psi_{1112} = -\bar{\pi}\rho,$$
$$D\beta = \bar{\rho}\beta + \Psi_{1112}, \delta\rho = (\bar{\alpha} + \beta)\rho - \Psi_{1112}. \quad (4.3.5)$$

又由(4.2.37),(3.2.41),(3.2.28)可得

$$D\Psi_{1112} = 4\rho\Psi_{1112}, \delta\Psi_{1112} = 2\beta\Psi_{1112},$$
$$\delta D - D\delta = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D - \bar{\rho}\delta.$$

由上式得知

$$D\log\Psi_{1112} = 4\rho, \delta\log\Psi_{1112} = 2\beta,$$
$$(\delta D - D\delta)\log\Psi_{1112} = 4\delta\rho - 2D\beta = 4\rho(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) - 2\bar{\rho}\beta.$$

用(4.3.5)代入上式，得到

$$4\rho(\bar{\alpha} + \beta) - 6\Psi_{1112} - 2\bar{\rho}\beta = 4\rho(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) - 2\bar{\rho}\beta.$$

由此得出，$\Psi_{1112} = \frac{2}{3}\bar{\pi}\rho$。这与(4.3.5)第三式矛盾，除非 Ψ_{1112}

$=0$，因此 Weyl 张量是代数特殊的。我们有

定理 4.3.1 (Goldberg-Sachs) 非 O 型真空引力场是代数特殊的充要条件为可选取适当的拟正交标架，使得 $\sigma=\kappa=0$。

在上面定理的证明中是选取标架 $\{e_j^{(a)}\}$，使得 $\Psi_{ABCD}=\chi\alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}$ 中 $\alpha_1=0, \alpha_2=1$。把 α_A 看作一旋量，而作对标架的向量

$$\alpha_A\bar{\alpha}_B\sigma_a^{AB},$$

其中

$$\sigma_a^{AB}=\eta_{ab}\sigma_{CD}^b\varepsilon^{CA}\varepsilon^{DB}. \tag{4.3.6}$$

容易证明

$$\begin{aligned}\sigma_a &= (\sigma_a^{AB})_{1\leqslant A,B\leqslant 2}=\eta_{ab}\varepsilon'\sigma^b\varepsilon=\sigma^a\\ &= (\sigma_{AB}^a)_{1\leqslant A,B\leqslant 2}.\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

令

$$\tau_j{}^{AB}=e_j^{(a)}\sigma_a^{AB}, \tag{4.3.8}$$

显然易见

$$\alpha_A\bar{\alpha}_B\tau_j^{AB}$$

是一对自然标架的协变向量．同理令

$$\eta_1=1,\ \eta_2=0,$$

便易证得

$$\begin{aligned}&e_j^{(0)}=\alpha_A\bar{\alpha}_B\tau_j^{AB},\ e_j^{(1)}=\eta_A\bar{\eta}_B\tau_j^{AB},\\ &e_j^{(2)}=\alpha_A\bar{\eta}_B\tau_j^{AB}, e_j^{(3)}=\eta_A\bar{\alpha}_B\tau_j^{AB}.\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

我们要证明 $e^j_{(0)}$ 是零测地线族．一向量 l^i 称为零向量，若

$$l^il_j=0.$$

此可微分向量场 l^i 称为测地线族，若满足方程

$$l_{j;k}l^k=\varphi l_j, \tag{4.3.10}$$

φ 是一标量场。

由于方程

$$\frac{dx^j}{du}=l^j$$

任意给与初始条件 $x^j(u)=x_0^j$ 后就有唯一的解,即通过 x_0 点有一曲线 $x^j=x^j(u)$，它的切线方向就是 l^j. 由(4.3.10)得知,此曲线满足

$$\frac{d^2x^j}{du^2}+\left\{\begin{matrix}j\\kl\end{matrix}\right\}\frac{dx^k}{du}\frac{dx^l}{du}=\varphi l^j. \qquad (4.3.11)$$

作变数变换

$$r=r(v),$$

方程化为

$$\left(\frac{d^2x^j}{dr^2}+\left\{\begin{matrix}j\\kl\end{matrix}\right\}\frac{dx^k}{dr}\frac{dx^l}{dr}\right)\left(\frac{dr}{du}\right)^2=\left(\varphi\frac{dr}{du}-\frac{d^2r}{du^2}\right)\frac{dx^j}{du}.$$

选取 r，使得

$$\frac{d^2r}{du^2}-\varphi\frac{dr}{du}=0,$$

则(4.3.11)化为

$$\frac{d^2x^j}{dr^2}+\left\{\begin{matrix}j\\kl\end{matrix}\right\}\frac{dx^k}{dr}\frac{dx^l}{dr}=0, \qquad (4.3,12)$$

此参数 r 称为测地线的仿射参数.

现在由(4.3.9)定义的向量中，$e_j^{(0)}$ 显然是类光的，因为

$$g^{jk}e_j^{(0)}e_k^{(0)}=\eta^{ab}e^j_{(a)}e^k_{(b)}e_j^{(0)}e_k^{(0)}=\eta^{00}=0.$$

据(4.1.8),(3.1.5),(3.1.2)可知

$$\Gamma_{ABC\dot{D}}=\varepsilon_{AF}\Gamma^F{}_{BC\dot{D}}=\varepsilon_{AF}\Gamma^F{}_{Bj}e^j_{(c)}\sigma^c_{C\dot{D}}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{AF}\Gamma^a_{bj}\sigma_a^{F\dot{E}}\sigma^b_{B\dot{E}}\sigma^c_{C\dot{D}}e^j_{(c)}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{AF}\left(\frac{\partial e^l_{(b)}}{\partial x^j}+\left\{\begin{matrix}l\\jk\end{matrix}\right\}e^k_{(b)}\right)e_l^{(a)}e^j_{(c)}\sigma_a^{F\dot{E}}\sigma^b_{B\dot{E}}\sigma^c_{C\dot{D}}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{AF}\left(\frac{\partial e_{(b)l}}{\partial x^j}+\left\{\begin{matrix}k\\lj\end{matrix}\right\}e_{(b)k}\right)e^l_{(a)}e^j_{(c)}\sigma^a_{H\dot{K}}\varepsilon^{FH}\varepsilon^{\dot{E}\dot{K}}\sigma^b_{B\dot{E}}\sigma^c_{C\dot{D}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{(b)l}}{\partial x^j} + \left\{ {k \atop lj} \right\} e_{(b)k}\right) e^l_{(a)} e^j_{(c)} \sigma^a_{A\dot{E}} \epsilon^{B\dot{E}} \sigma^b_{B\dot{B}} \sigma^c_{C\dot{D}}.$$

由 Goldberg-Sachs 定理可知

$$0 = K = \Gamma_{111\dot{1}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{(b)l}}{\partial x^j} + \left\{ {k \atop lj} \right\} e_{(b)k}\right)$$

$$\times e^l_{(a)} e^j_{(c)} \sigma^a_{1\dot{E}} \epsilon^{B\dot{E}} \sigma^b_{1\dot{B}} \sigma^c_{1\dot{1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{(2)l}}{\partial x^j} + \left\{ {k \atop lj} \right\} e_{(2)k}\right) e^l_{(0)} e^j_{(0)}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{(0)l}}{\partial x^j} + \left\{ {k \atop lj} \right\} e_{(0)k}\right) e^l_{(2)} e^j_{(0)}$$

$$= \frac{1}{2}[e_{(2)l;j} e^l_{(0)} - e_{(0)l;j} e^l_{(2)}] e^j_{(0)}.$$

由于

$$g_{jl} e^j_{(2)} e^l_{(0)} = \eta_{20} = 0,$$

故有

$$e_{(2)l;j} e^l_{(0)} + e^l_{(2)} e_{(0)l;j} = 0,$$

得出

$$e_{(0)l;j} e^l_{(2)} e^j_{(0)} = 0.$$

据(4.3.9)可知，上式的旋量形式为

$$(\eta_A \overline{\eta_B})_{;C\dot{D}} (\eta^A \overline{\alpha^B})(\eta^C \overline{\eta^D}) = 0.$$

由于 $\eta_A \eta^A = 0$ 及 $\overline{\eta_B}\,\overline{\alpha^B} = -1$，得出

$$\eta^A \eta^C \overline{\eta^D} \eta_{A;C\dot{D}} = 0,$$

必有

$$\eta^C \overline{\eta^D} \eta_{A;C\dot{D}} = \psi \eta_A.$$

用 $\overline{\eta_B}$ 乘上式，得出

$$\overline{\eta_B} \eta^C \overline{\eta^D} \eta_{A;C\dot{D}} = \psi \eta_A \overline{\eta_B}.$$

取复共轭然后把 A, B 互换，与上式相加便得到

$$\eta^C \overline{\eta^D} (\eta_A \overline{\eta_B})_{;C\dot{D}} = (\psi + \bar{\psi}) \eta_A \overline{\eta_B}.$$

此即

$$e_{(0)j;l}e^l_{(0)} = \varphi e_{(0)j}, \varphi = \psi + \bar{\psi},$$

这证明 $e^i_{(0)}$ 是测地线族。我们得出

定理 4.3.2 对于一代数上特殊的真空引力场，$\Psi_{ABCD}z^Az^Bz^Cz^D = 0$ 的重根 α_A 对应的向量场 $e^i_{(0)}$ 是一零测地线族。

§4.4 平面波前引力波（PP 波）

用旋量的方法来解引力场方程是十分有效的，可参阅 Newman 等[4] Kinnersley[2]，陆启铿等[7]，邹振隆等人的论文[8]。可惜这些方法都是十分之繁，作为本书的内容并不合适，并且其所得的解的物理意义往往没有比用张量方法所得到的解清楚。因此这里采用能得到物理意义更为清楚的 PP 波解的方法，仍然沿用张量的方法。所谓平面波前引力波（plane-fronted wave with parallel rays，简称 PP 波），是考虑存在一个反称张量场 $W_{jk} = -W_{kj}$，其协变微分为零的真空引力场的解（见 J. Ehlers 等[1]）。这种引力场必属于N型，但不是全部N型真空引力场的解，全部N型的解是可以用旋量方法得到的（见文献 [8]），甚至加上一个纯电磁辐射的能量、动量、张量的非真空N型引力场的全部解亦可得到。

首先证明：

定理 4.4.1 Weyl 张量属于N型的充要条件为存在一非零的类光向量 ξ^i 使得

$$C_{hjkl}\xi^l = 0.$$

证 若 C_{hjkl} 是N型，则其旋量形式

$$C_{A\dot{E}B\dot{F}C\dot{G}D\dot{H}} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}}\varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} + \overline{\Psi_{EFGH}}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}$$

中，$\Psi_{ABCD}z^Az^Bz^Cz^D = \kappa(\alpha_1z^1 + \alpha_2z^2)^4$，可选取拟正交标架，使 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$，于是有 $\Psi_{1ABD} = 0$。令 $\alpha^D = \varepsilon^{AD}\alpha_A$，则

$$\Psi_{ABCD}\alpha^D = 0. \tag{4.4.1}$$

由此可知

$$C_{A\bar{E}B\bar{F}C\bar{G}D\bar{H}}\alpha^D\overline{\alpha^H} = 0. \tag{4.4.2}$$

化为张量的形式即

$$C_{abcd}\xi^d = 0, \tag{4.4.3}$$

其中，$\xi^a = \alpha^A\overline{\alpha^B}\sigma^a_{AB}$ 显然是类光的。

反之，如果 ξ^d 是非零的类光向量适合(4.4.3)，则$\det(\xi^a\sigma_a) = 0$，因此可写为 $\xi^a\sigma_a^{AB} = \alpha^A\overline{\alpha^B}$，其中 α^A 使得(4.4.2)成立，于是必定(4.4.1)成立；此即

$$\Psi_{ABCD}\alpha^A = 0.$$

不妨假定$(\alpha^A) = (\xi, 0)$。否则作 $SL(2,C)$ 的变换使之如此。于是除了 Ψ_{2222} 以外所有 $\Psi_{ABCD} = 0$，此即 $\Psi_{ABCD}z^Az^Bz^Cz^D$ 有四重根，于是 Weyl 张量是N型，定理得证。

定理4.4.2 设有一反称的可微分的二阶协变张量场 $W_{jk} = -W_{kj}$ 适合

$$W^{jk}W_{jk} = 0,\quad W^{jk}W^*_{jk} = 0, \tag{4.4.1$'$}$$

及

$$W_{jk;l} = 0, \tag{4.4.2$'$}$$

则能选取局部坐标使得度量化为如下形式

$$ds^2 = 2dx^0dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + 2H(dx^3)^2, \tag{4.4.3$'$}$$

其中 $H = H(x^1, x^2, x^3)$ 不包含 x^0；由此可知 Ricci 张量为

$$R_{jk} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2\partial x^2}\right)\delta^3_j\delta^3_k. \tag{4.4.4}$$

证 取$\{e^j_{(a)}\}$为一组伪正交标架，使得对于此组标架

$$(W_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix},$$

则由计算中可知

$$W^{ab}W_{ab}=\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2, W^{ab}W^*_{ab}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}.$$

由于定理的假设可知 $\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$，我们可作标架的三维空间的旋转，使得

$$E_1=H_1=0, E_2=0, H_3=0, E_3=H_2.$$

对于此正交标架

$$(W_{ab})=E_3\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix},$$

即 $W_{ab}=E_3(\delta^{03}_{ab}-\delta^{13}_{ab})=E_3[(\delta^0_a-\delta^1_a)\delta^3_b-(\delta^0_b-\delta^1_b)\delta^3_a]$. 换为自然标架有

$$W_{jk}=\xi_j\eta_k-\xi_k\eta_j, \xi^j\xi_j=0, \xi^j\eta_j=0, \eta^j\eta_j=-1. \tag{4.4.5}$$

由此可知

$$W_{jk}W^{kl}=\xi_j\xi^l, \tag{4.4.6}$$

故由假设得知

$$\xi_{j;k}\xi^l+\xi^l{}_{;k}\xi_j=0. \tag{4.4.7}$$

换回正交标架有

$$\xi_{a;b}\xi^c+\xi_a\xi^c{}_{;b}=0, \tag{4.4.8}$$

其中 $\xi_a=E_3(\delta^0_a-\delta^1_a)$, $\eta_b=\delta^3_b$. 因此，分别取 $a=c=0$; $a=c=1$; $a=2, c=0$; $a=3$, $c=0$ 时便有，$\xi_{0;b}=0$, $\xi_{1;b}=0, \xi_{2;b}=0, \xi_{3;b}=0$, 此即证明：给与张量 W_{jk} 满足条件(4.4.1)和(4.4.2)，则存在向量 ξ_j 使

$$\xi_{j;k}=0. \tag{4.4.9}$$

由于

$$\frac{\partial\xi_j}{\partial x^k}-\frac{\partial\xi_k}{\partial x^j}=\xi_{j;k}-\xi_{k;j}=0, \tag{4.4.10}$$

故有函数 u 使得 $\xi_i=\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$. 作坐标变换 $\tilde{x}^0=x^0$, $\tilde{x}^1=x^1$,

$\tilde{x}^2 = x^2, \tilde{x}^3 = u$，则对新的坐标有 $\xi_j = \delta_j^3$. 不妨假定原来坐标就有

$$\xi_j = \delta_j^3, \tag{4.4.11}$$

此即 (4.4.5) 化为

$$W_{jk} = \delta_j^3 \eta_k - \delta_k^3 \eta_j. \tag{4.4.12}$$

由于

$$\frac{\partial W_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial W_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial W_{kh}}{\partial x^j} = W_{hj;k} + W_{jk;h} + W_{kh;j} = 0,$$

特别是

$$\frac{\partial W_{h3}}{\partial x^k} + \frac{\partial W_{3k}}{\partial x^h} + \frac{\partial W_{kh}}{\partial x^3} = 0,$$

取 $h,k = 0,1,2$ 时，有

$$-\frac{\partial \eta_h}{\partial x^k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x^h} = 0, \ h,k = 0,1,2.$$

由此可知，存在标量 φ 使

$$\eta_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}, \ j = 0,1,2,$$

故 η_j 可写为

$$\eta_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \delta_j^3\left(\eta_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right). \tag{4.4.13}$$

取坐标

$$\tilde{x}^0 = x^0, \ \tilde{x}^1 = \varphi, \ \tilde{x}^2 = x^2, \ \tilde{x}^3 = x^3,$$

于是

$$\tilde{\eta}_j = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \delta_k^3\left(\eta_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)\right]\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}$$

$$= \delta_j^1 + \delta_j^3\left(\eta_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right),$$

故不妨假定原来坐标就有

$$\eta_j = \delta_j^1 + \delta_j^3 \eta_3, \tag{4.4.14}$$

其中 η_3 与原来的不同，并以之代入(4.4.12)便可得

$$W_{jk} = \delta_j^3 \delta_k^1 - \delta_k^3 \delta_j^1 = \delta_{jk}^{31}. \tag{4.4.15}$$

对于伪正交标架

$$W^*_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} W^{cd} = \frac{E_3}{2} \delta^{0123}_{abcd} (-\delta^{cd}_{03} - \delta^{cd}_{13})$$

$$= E_3(-\delta^{12}_{ab} + \delta^{02}_{ab}) = E_3[(\delta^0_a - \delta^1_a)\delta^2_b$$

$$- (\delta^0_b - \delta^1_b)\delta^2_a],$$

故对自然标架有

$$W^*_{jk} = \xi_j \zeta_k - \xi_k \zeta_j = \delta_j^3 \zeta_k - \delta_k^3 \zeta_j, \tag{4.4.16}$$

其中 $\zeta_j = \delta^2_a e_j^{(a)}, \zeta^j \eta_j = 0, \xi_j \zeta^j = 0, \zeta^j \zeta_j = -1$. 又由 $W^*{}_j{}^*{}_{k;l} = 0$ 可知如前面一样证明

$$\zeta_j = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \delta_j^3 \left(\zeta_3 - \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right),$$

并可取新的坐标

$$x^0 \mapsto x^0, \quad x^1 \mapsto x^1, \quad x^2 \mapsto \psi, \quad x^3 \mapsto x^3,$$

使得

$$\zeta_j = \delta_j^2 + \zeta_3 \delta_j^3,$$

因而有

$$W^*_{jk} = \delta_j^3 \delta_k^2 - \delta_k^3 \delta_j^2 = \delta_{jk}^{32}. \tag{4.4.17}$$

由(4.4.5),(4.4.6)得出

$$0 = \xi^j \xi_j = g^{jk} \delta_j^3 \delta_k^3 = g^{33},$$

$$0 = \xi^j \eta_j = g^{jk} \delta_j^3 (\delta_k^1 + \eta_3 \delta_k^3) = g^{31},$$

$$0 = \xi^j \zeta_j = g^{jk} \delta_j^3 (\delta_k^2 + \zeta_3 \delta_k^3) = g^{32},$$

$$0 = \zeta^j \eta_j = g^{jk} (\delta_j^1 + \eta_3 \delta_j^3)(\delta_k^2 + \zeta_3 \delta_k^3) = g^{12},$$

$$-1 = \eta^j \eta_j = g^{jk} (\delta_j^1 + \eta_3 \delta_j^3)(\delta_k^1 + \eta_3 \delta_k^3) = g^{11},$$

$$-1 = \zeta^j \zeta_j = g^{jk} (\delta_j^2 + \zeta_3 \delta_j^3)(\delta_k^2 + \zeta_3 \delta_k^3) = g^{22},$$

得出

$$(g^{jk})=\begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{01} & -1 & 0 & 0 \\ g^{02} & 0 & -1 & 0 \\ g^{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故其逆方阵为下述形式

$$(g_{jk})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & -1 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & -1 & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$g_{03}=1/g^{03},\quad g_{13}=\frac{g^{01}}{g^{03}},\quad g_{23}=\frac{g^{02}}{g^{03}},$$

$$g_{33}=-\frac{g^{00}+(g^{01})^2+(g^{02})^2}{(g^{03})^2},$$

即度量化为

$$ds^2=2g_{03}dx^0dx^3+2g_{13}dx^1dx^3+2g_{23}dx^2dx^3$$
$$+g_{33}(dx^3)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2. \qquad (4.4.18)$$

不妨假定

$$g_{03}=1, \qquad (4.4.19)$$

否则可作坐标变换

$$\tilde{x}^0=\int_0^{x^0} g_{03}(t,x^1,x^2,x^3)dt,\ \tilde{x}^1=x^1,\ \tilde{x}^2=x^2,\ \tilde{x}^3=x^3,$$

使之如此。

由于

$$0=\xi_{j;k}=\delta^3_{j;k}=-\begin{Bmatrix} 3 \\ jk \end{Bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}g^{30}\left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{0k}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^0}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^0}$$

故可以知道

$$\frac{\partial g_{13}}{\partial x^0}=\frac{\partial g_{23}}{\partial x^0}=\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0}=0,$$

即 g_{13}，g_{23}，g_{33} 不包含 x^0. 由

$$0=W_{jk;l}=\delta_j^3\delta_{k;l}^1-\delta_k^3\delta_{j;l}^1=-\delta_j^3\begin{Bmatrix}1\\kl\end{Bmatrix}+\delta_k^3\begin{Bmatrix}1\\jl\end{Bmatrix},$$

取 $j=l=3$，$k=2$，便有

$$0=\begin{Bmatrix}1\\32\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{10}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{02}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^0}\right)$$
$$+\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\right),$$

故存在标量 σ 不含 x^0 使

$$g_{23}=\frac{\partial\sigma}{\partial x^2},\quad g_{13}=\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}.$$

取新坐标

$$\tilde{x}^0=x^0+\sigma(x^1,x^2,x^3),\ \tilde{x}^j=x^j,\ j=1,2,3,$$

有

$$ds^2=2\left(dx^0+\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\sigma}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial\sigma}{\partial x^3}dx^3\right)dx^3$$
$$+\left(g_{33}-2\frac{\partial\sigma}{\partial x^3}\right)(dx^3)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2$$
$$=2d\tilde{x}^0d\tilde{x}^3+2\tilde{H}(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)(d\tilde{x}^3)^2-(d\tilde{x}^1)^2-(d\tilde{x}^2)^2,$$

这证明定理(4.4.3)成立. 此时

$$(g_{ik})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&2H\end{pmatrix},\ (g^{ik})=\begin{pmatrix}-2H&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\tag{4.4.20}$$

显而易见

$$\begin{Bmatrix}0\\13\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\31\end{Bmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x^1},\ \begin{Bmatrix}0\\23\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\32\end{Bmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x^2},$$

$$\begin{Bmatrix}0\\33\end{Bmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x^3},\ \begin{Bmatrix}1\\33\end{Bmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x^1},\ \begin{Bmatrix}2\\33\end{Bmatrix}=\frac{\partial H}{\partial x^2},$$

$$\text{其它}\begin{Bmatrix}i\\kl\end{Bmatrix}=0. \tag{4.4.21}$$

此外，由于

$$\det(g_{ik})=-1,\ \text{故}\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log|\det(g_{ik})|}{\partial x^k}=0,$$

及

$$R_{hl}=\frac{\partial}{\partial x^i}\begin{Bmatrix}i\\hl\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^l}\begin{Bmatrix}j\\hj\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}i\\kl\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\hj\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}i\\kj\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\hl\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^i}\begin{Bmatrix}i\\hl\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}j\\kl\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\hj\end{Bmatrix}.$$

很容易地便可知道

$$R_{33}=\frac{\partial^2 H}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2 H}{(\partial x^2)^2},\ \text{其它}\ R_{hl}=0.$$

这证明了(4.4.4)，定理完全得证。

由 (4.4.4) 可知

$$R_{jk}=\lambda\xi_j\xi_k,\ \lambda=\frac{\partial^2 H}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2 H}{(\partial x^2)^2},$$

其中 ξ^i 是类光的，因此有

$$R_{jk}\xi^k=0,\ R=R^i{}_i=0, \tag{4.4.22}$$

及

$$\xi_i R^i{}_{hkl}=\xi_{h;kl}-\xi_{h;lk}=0.$$

故由 (2.1.3) 可知

$$C_{hjkl}\xi^l = \frac{1}{2}(g_{hl}R_{jk} - g_{jl}R_{hk})\xi^l$$

$$= \frac{\lambda}{2}(\xi_h\xi_j\xi_k - \xi_j\xi_h\xi_k) = 0.$$

应用定理 4.4.1 可知

定理 4.4.3 在定理 4.4.2 的条件下，Weyl 张量必属于 N 型

此外，有

定理 4.4.4 在定理 4.4.2 条件下，(4.4.3) 是真空引力场之解的充要条件为

$$\frac{\partial^2 H}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 H}{(\partial x^2)^2} = 0, \qquad (4.4.23)$$

其中 H 不含 x^0.

作坐标变换

$$x^0 = t + x,\ x^3 = t - x,\ x^1 = y,\ x^2 = z,$$

则 $H = H(y, z, t - x)$. 由方程(4.4.3)可知 H 适合

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0,$$

即 $H(y, z, t - x)$ 是波动方程的平面波前解，但这里讨论的是引力场，故此解称为平面波前引力波解.

参考文献

[1] J. Ehlers and W. Kundt, Exact solutions of the gravitational field equations, in Gravitation ed. by L. Witten, 49(1962).

[2] W. Kinnersley, Type D "Vacuum Metrices", *J. Math. Phys.*, **10**, 1175(1969).

[3] T. Newman and R. Penrose, An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients, *J. Math. Phys.*, **3**, 566 (1962).

[4] T. Newman, L. Tamburino and T. Unti, Empty-space generalization of the Schwarzschild metric, *J. Math. Phys.*, **2**, 902(1962).

[5] R. Penrose, A spinor approach to general relativity, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **10**, 171(1960).

[6] 陆启铿,旋量分析与引力辐射(讲义)(1970).

[7] 陆启铿、刘煜奋、邹振隆、郭汉英，标量张量引力波，物理学报，**23**,95 (1974)

[8] 邹振隆、刘煜奋、郭汉英、陆启铿，自由电磁场与纯粹引力辐射，北京天文台台刊,**2**,33(1973).

[9] 蒋声,标架的简化旋量体系及其对杨振宁方程的应用，物理学报,**26**,259 (1977).

第五章 微 分 流 形

§5.1 微分流形与微分映照

设 $\mathfrak{M}$ 是具有可数基的 Hausdorff 空间，且是局部欧几里德，此即每点 $p\in\mathfrak{M}$，有一邻域 U 及一映照 x 把 U 拓扑地映为欧氏空间 R^m 的一开集，则 $\mathfrak{M}$ 称为 m 维流形．(U,x) 称为 $\mathfrak{M}$ 的一个**图** (chart)，U 称为**坐标邻域**，x 称为此邻域的(局部)**坐标系**．U 中的 q 点经 x 对应的 R^m 中的点 $x(q)=(x^1(q),\cdots,x^m(q))$ 称为 q 点的**坐标**．有时为简便起见，称 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 为 $\mathfrak{M}$ 的一个(局部)**坐标系**．注意，最一般的流形定义并不一定要求具有可数基，但我们所考虑的流形，便于在其中考虑积分等原因，加上此条件．

流形 $\mathfrak{M}$ 上的一个图的集合 $\mathfrak{A}$ 称为 C^k **图册** $(k\geqslant 1)$(Atlas)，如果适合 (i) 任一点 $p\in\mathfrak{M}$ 必有一图 $(U,x)\in\mathfrak{A}$，使 $p\in U$；(ii) 任两图 (U,x)，$(\tilde{U},\tilde{x})\in\mathfrak{A}$，若 $U\cap\tilde{U}\neq\phi$，则 $\tilde{x}\circ x^{-1}:x(U\cap\tilde{U})\to R^m$ 是 C^k (k 次连续可微分)的映照，$\tilde{x}\circ x^{-1}$ 称为(局部)坐标变换．$\mathfrak{M}$ 称为 C^k **微分流形**，如果它有一个 C^k 图册．今后除非特别申明，都是在 C^∞ 流形上进行讨论．

如流形 $\mathfrak{M}$ 有一个实解析图册，即条件 (ii) 中的坐标变换 $\tilde{x}\circ x^{-1}$ 是实解析的，则称为**实解析流形**．

如果流形 $\mathfrak{M}$ 的维数是 $m=2n$，并且当把 R^{2n} 看作是 n 个复数 $z=(z^1,\cdots,z^n)$ 所成的空间 C^n 时，有一个复解析图册 $\mathfrak{A}$，即其中条件 (ii) 中坐标变换 $\tilde{z}\circ z^{-1}$ 是全纯 (holomorphic) 映照，即 $\tilde{z}\circ z^{-1}$ 的坐标表示

$$\tilde{z}^a(p) = f^a(z^1(p), \cdots, z^n(p)), \quad p \in U \cap \tilde{U},$$

其中 f^a 是 $z(U \cap \tilde{U})$ 上的全纯函数，则 $\mathfrak{M}$ 称为 n 维**复流形**.

若 $\mathfrak{M}$ 有某一类型（C^k，实解析或复解析）的图册 $\mathfrak{A}$，而 (U, x) 是 $\mathfrak{M}$ 中的图，使 $(U, x) \cap \mathfrak{A}$ 仍然是同一类型图册，则 (U, x) 称为**可容许图**，U 称为**可容许邻域**，x 称为**可容许坐标系**. 如果对于图册 $\mathfrak{A}$ 的任一可容许图必属于 $\mathfrak{A}$，则 $\mathfrak{A}$ 称为 $\mathfrak{M}$ 的（C^k，实解析或复解析）**结构**.

例一. 设 $f_1(x), \cdots, f_r(x)$ 是 R^m 的开集 V 中的 C^k 可微分函数，令 $\mathfrak{M}$ 是 V 中适合

$$f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0$$

的所有 x 点组成的集合. 若函数矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x^m} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

之秩在 V 上恒为 r，则 $\mathfrak{M}$ 的对于 V 的相对拓扑而言，成为一个 $m - r$ 维 C^k 流形.

实际上，对任一 $x_0 \in \mathfrak{M}$，由 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 之秩为 r，必有 r 阶子方阵

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_r)}{\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_r})}$$

在 $x = x_0$ 非异，应用隐函数存在定理可知道，有 V 中 x_0 的邻域 U_{x_0}，使得 $\mathfrak{M} \cap U_{x_0}$ 的点的坐标能表为

$$x^{i_j} = \varphi^{i_j}(x^{i_{r+1}}, \cdots, x^{i_m}), \quad j = 1, \cdots, r,$$

其中 $i_{r+1}, \cdots, i_m$ 是 $1, \cdots, m$ 除去了 $i_1, \cdots, i_r$ 所余下的数. 这里 $(x^{i_{r+1}} - x_0^{i_{r+1}})^2 + \cdots + (x^{i_m} - x_0^{i_m})^2 < \varepsilon^2$，而且 $\varphi^{i_1}, \cdots, \varphi^{i_r}$ 是 $x^{i_{r+1}}, \cdots, x^{i_m}$ 的 C^k 的可微分函数.

对另一点 $y_0\in\mathfrak{M}$，同样有 V 中的邻域 U_{y_0}，使 $\mathfrak{M}\cap U_{y_0}$ 的点 x 的坐标能表示为

$$x^{j_k}=\psi^{j_k}(x^{j_{r+1}},\cdots,x^{j_m}),\quad k=1,\cdots,r,$$
$$(x^{j_{r+1}}-y_0^{j_{r+1}})^2+\cdots+(x^{j_m}-y_0^{j_m})^2<\varepsilon_1^2,$$

其中 $j_1,\cdots,j_m$ 是 $1,\cdots,m$ 的一个排列。

如有 $x\in(\mathfrak{M}\cap U_{x_0})\cap(\mathfrak{M}\cap U_{y_0})$，设 $j_{r+1},\cdots,j_m$ 在 $i_1,\cdots,i_r$ 中有 l 个相同，例如 $j_{r+1}=i_1,\cdots,j_{r+l}=i_l$ 则 $j_{r+l+1},\cdots,j_m$ 必在 $i_{r+1},\cdots,i_m$ 中出现，不妨设 $j_{r+l+1}=i_{r+1},\cdots,j_m=i_{m-l}$. 由此可知

$$x^{j_{r+1}}=\varphi^{i_1}(x^{i_{r+1}},\cdots,x^{i_m}),$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$x^{j_{r+l}}=\varphi^{i_l}(x^{i_{r+1}},\cdots,x^{i_m}),$$
$$x^{j_{r+l+1}}=x^{i_{r+1}},$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$x^{j_m}=x^{i_{m-l}}.$$

这就表明局部坐标变换是 C^k 可微分的，因此 $\mathfrak{M}$ 是 C^k 可微分流形。

这个例子是有相当的普遍性，因为据 Whitney 的定理，任一 m 维微分流形可安装于 R^{2m} 中作为微分子流形. 此外，如 $f_1(x),\cdots,f_r(x)$ 是实解析的，则上例中的流形 $\mathfrak{M}$ 是实解析的 $m-r$ 维流形；如 $f_1(z),\cdots,f_r(z)$ 是 C^n 的开集 V 中的全纯函数，且函数矩阵 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 V 上之秩为 r，则 $\mathfrak{M}$ 是 $n-r$ 维复流形。

例二. 令 P 是 C^{n+1} 中过原点的(非蜕化)解析超平面，即有一组不全为 0 的复数 $(p_1,\cdots,p_{n+1})$，而 P 是适合线性方程

$$p_1z^1+\cdots+p_{n+1}z^{n+1}=0$$

的 $(z^1,\cdots,z^{n+1})\in C^{n+1}$ 的点所成的点集，此平面 P 可以用一

组不全为零的复数$(p_1,\cdots,p_{n+1})$代表．如果$(q_1,\cdots,q_{n+1})$是另一组不全为 0 的复数，它所代表的平面亦是P的充要条件为有一非零复数 λ，使得$(q_1,\cdots,q_{n+1})=(\lambda p_1,\cdots,\lambda p_{n+1})$．

所有过 C^{n+1} 的原点的n维解析超平面所组成的空间称为n维**复投影空间**$P^n(C)$．令U_α表示所有以$(p_1,\cdots,p_{n+1})$，$p_\alpha\neq 0$为代表的解析超平面，于是 U_α 中的超平面可写为

$$\frac{p_1}{p_\alpha}z^1+\cdots+\frac{p_{\alpha-1}}{p_\alpha}z^{\alpha-1}+z^\alpha+\frac{p_{\alpha+1}}{p_\alpha}z^{\alpha+1}+\cdots$$

$$+\frac{p_{n+1}}{p_\alpha}z^{n+1}=0,$$

它是与一组数$(\xi^1,\cdots,\xi^n)$一一对应，其中 $\xi^1=p_1/p_\alpha,\cdots,\xi^{\alpha-1}=p_{\alpha-1}/p_\alpha,\xi^\alpha=p_{\alpha+1}/p_\alpha,\cdots,\xi^n=p_{n+1}/p_\alpha$．亦即$U_\alpha$的点$P$与$C^n$中的点一一对应。

显而易见，$U_1,\cdots,U_{n+1}$把$P^n(C)$盖过，并且在$U_\alpha\cap U_\beta$ $(1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant n+1)$中局部坐标变换为

$$\xi^\mu=p_\mu/p_\alpha=\frac{p_\mu/p_\beta}{p_\alpha/p_\beta}=\frac{\zeta^\mu}{\zeta^\alpha},\ \text{当}\ 1\leqslant\mu\leqslant\alpha-1,$$

$$\xi^\mu=p_{\mu+1}/p_\alpha=\frac{p_{\mu+1}/p_\beta}{p_\alpha/p_\beta}=\frac{\zeta^{\mu+1}}{\zeta^\alpha},\ \text{当}\ \alpha\leqslant\mu\leqslant\beta-2,$$

$$\xi^{\beta-1}=p_\beta/p_\alpha=\frac{1}{\zeta_\alpha},$$

$$\xi^\mu=p_{\mu+1}/p_\alpha=\frac{p_{\mu+1}/p_\beta}{p_\alpha/p_\beta}=\frac{\zeta^\mu}{\zeta^\alpha},\ \text{当}\ \beta\leqslant\mu\leqslant n,$$

其中$(\zeta^1,\cdots,\zeta^n)$是U_β的局部坐标系．由此可知,所有$\{(U_\alpha,\xi)\}$成一复解析图册，因此 $P^n(C)$ 是n维复流形。

同样可定义实投影空间$P^m(R)$，即由过R^{m+1}的原点的所有m维超平面的空间，这是m维实解析流形。

如映照 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 是一一对应的称为内射(injection)；如

$f(\mathfrak{M})=\mathfrak{N}$,则称 f 为满射 (surjection). 如 f 与逆映照 f^{-1}(如果 f^{-1} 存在)皆是满射,则称 f 为双满射(bijection).

设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 分别是 m 与 n 维微分流形,映照 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 称为可微分映照,若(U,x)与(V,y)分别是 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 的图适合 f 限制在 U 上时,$f:U\to V$, 则 $y\circ f\circ x^{-1}:x(U)\to y(V)$ 是微分映照. 若 f 是双满射,且 f 与 f^{-1} 皆可微的,则 f 称为**微分同胚**.

微分流形上任一 $p\in\mathfrak{M}$, 必有坐标邻域 U, 使 $p\in U$. 命 $\mathfrak{M}_p$ 为 p 点的所有向量所成的实线性空间(见§1.5), $\mathfrak{M}_p$ 称为 p 点的切空间. 微分映照 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$, 诱导出 $\mathfrak{M}_p$ 到 $\mathfrak{N}_{f(p)}$ 的一个线性映照(见§1.7) $f_*:\mathfrak{M}_p\to\mathfrak{N}_{f(p)}$, 此映照在 p 的秩(rank)称为 r, 若 $f_*(\mathfrak{M}_p)$ 是 $\mathfrak{N}_{f(p)}$ 的 r 维线性子空间.

令 (U,x) 是 $\mathfrak{M}$ 的图, $p\in U$, (V,y) 是 $\mathfrak{N}$ 的图, $q=f(p)\in V$, 则 $y\circ f\circ x^{-1}$ 的坐标表示

$$y^\alpha(q)=f^\alpha(x(p)),\quad \alpha=1,\cdots,n,\tag{5.1.1}$$

其中 f^α 是 $x(p)=(x^1(p),\cdots,x^m(p))$在 $x(U)$ 中的可微分函数,(5.1.1)称为映照 f 的局部坐标表示.在不致引起误会的时候,简单的可写为

$$y^\alpha=f^\alpha(x),\quad \alpha=1,\cdots,n.\tag{5.1.2}$$

显而易见,映照 f 在 p 点的函数矩阵

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p=\left[\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right]_{x=x(p)}$$

之秩,即此映照在 p 之秩. 如 f 在 p 之秩为 m, 则 f_{*p} 是内射;如 f 在 p 之秩为 n, 则 f_{*p} 是满射. 由隐函数定理可知:

命题 5.1.1 设 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 是微分映照,则

(i) 如 f_{*p} 是内射,则存在 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 的可容许图(U,u), $p\in U$ 与 (V,v), $f:U\to V$ 使得

$$u^j(q)=v^j(f(q)),\quad j=1,\cdots,m,\quad q\in U,$$

特别是, f 是 U 到 $f(U)$ 的微分同胚.

(ii) 如 f_{*p} 是满射，则存在 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 的可容许图 (U,u)，$p\in U$ 与 (V,v)，$f:U\to V$ 使得

$$v^{\alpha}(f(q))=u^{\alpha}(q)\quad \alpha=1,\cdots,n,\ q\in U,$$

特别的是，映照 $f:U\to\mathfrak{N}$ 是开映照.

(iii) 如 f_{*p} 是$\mathfrak{M}_p$ 与 $\mathfrak{N}_{f(p)}$ 的同构，则 f 在 p 的一个邻域 U 中是同胚于 $f(p)$ 的一个邻域 V，并且逆映照 $f^{-1}:V\to U$ 是可微分的。

微分映照 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 称为浸入，如果 f_* 在每一点 $p\in\mathfrak{M}$ 是内射，此时我们称 $\mathfrak{M}$ 以 f 浸入 $\mathfrak{N}$ 中，或 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的**浸入子流形**. 如此时的 f 又是内射，则称为**安装**. 此时，$\mathfrak{M}$(或 $f(\mathfrak{M})$) 称为 $\mathfrak{N}$ 的**安装子流形**或简称**子流形**. $f(\mathfrak{M})$可以具有、也可以不具有相对于 $\mathfrak{N}$ 的拓扑.

例三. 令 $T^2=\{(z^1,z^2)\in\mathbf{C}^2\,\big|\,|z^1|=1,|z^2|=1\}$ 称为二维环面. α_1,α_2 为实数，且使 α_1/α_2 是无理数，映照 $f:R\to T^2$，使得

$$t\longmapsto(e^{i\alpha_1t},e^{i\alpha_2t}),$$

这里 $i=\sqrt{-1}$. f 是一一对应的，因为如有 $t\neq t_1$，使得

$$e^{i\alpha_1t}=e^{i\alpha_1t_1},e^{i\alpha_2t}=e^{i\alpha_2t_1},$$

则必有 $\alpha_1(t-t_1)=2k_1\pi$，$\alpha_2(t-t_1)=2k_2\pi$，k_1，k_2 均为整数，但 $\alpha_2/\alpha_1=k_2/k_1$ 是不可能的. 显而易见，$f:R\to T^2$ 是一安装. 由映照 f 引进 $S=f(R)$的拓扑，则 S 的拓扑必非相对于 T^2 的拓扑. 实际上，设(z_0^1,z_0^2)是 T^2 上任一点，必有实数 t_0，使 $z_0^1=e^{i\alpha_1t_0}$. 对任一整数 k，有 $z_0^1=e^{i\alpha_1(t_0+2\frac{k}{\alpha_1}\pi)}$.

令 $$z^2=e^{i\alpha_2(t_0+2\frac{k}{\alpha_1}\pi)}=e^{i\alpha_2t_0}e^{2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}k\pi i},$$

则 $(z_0^1,z^2)\in S$. 但由于 α_2/α_1 是无理数，据数论的熟知定理(例见华罗庚[11]，289 页)，$e^{2k\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\pi i}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 在圆周 $|z^2|=1$ 上到处稠密，因之任与 $\varepsilon>0$，有整数 k，使

$$|z^2 - z_0^2| < \varepsilon, \quad z_0^2 = e^{i\alpha_2 t_0},$$

这表示 S 的点在 T^2 中稠密. 若 S 的拓扑是相对于 T^2, 则 S 的任一开集 U_1, 例如

$$U_1 = \{(z^1, z^2) \in C^2 | z^1 = e^{i\alpha_1 t}, z^2 = e^{i\alpha_2 t}, |t| < \varepsilon\},$$

必有 T^2 的开集 U, 使 $U_1 = S \cap U$. 若 $(z_0^1, z_0^2) \in U_1$, 则上面的证明必有无穷多个 $(z_0^1, z^2) \in U$, 其中

$$z_0^1 = e^{i\alpha_1 (t_0 + 2\frac{k}{\alpha_1}\pi)}, \quad z^2 = e^{i\alpha_2 (t_0 + 2\frac{k}{\alpha_1}\pi)}$$

这表示 $(z_0^1, z^2) \in S$, 故 $(z_0^1, z^2) \in U_1$. 但可选取 k, 使 $|t_0 + 2\dfrac{k}{\alpha_1}\pi| > \varepsilon$, 即 $(z_0^1, z^2) \bar{\in} U_1$, 这是矛盾的, 故 S 的拓扑非相对于 T^2.

我们回忆一些拓扑的名词. 拓扑空间 $\mathfrak{M}$ 的一组集合 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 称为局部有限, 如任意 $p \in \mathfrak{M}$, 必有一邻域, 使得 U 最多与有限个 U_α 相交.

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 称为 $\mathfrak{M}$ 的覆盖, 如 $\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in J} U_\alpha$. 覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J_1}$ 称为覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 的加细, 如任一 $\beta \in J_1$, 必有 $\alpha \in J$, 使 $V_\beta \subset U_\alpha$. Hausdorff 空间称为仿紧 (Paracompact), 如果 $\mathfrak{M}$ 的任一开覆盖必有一个局部有限的加细开覆盖.

下面的引理见于通常的点集拓扑书中(例如见 Kelley[4]).

引理 5.1.2 若 $\mathfrak{M}$ 是局部紧并有可数基的 Hausdorff 空间, 则 $\mathfrak{M}$ 是仿紧. 此外, $\mathfrak{M}$ 中任一局部有限开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$, 必有 $\mathfrak{M}$ 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 适合 $\bar{U}_\alpha \subset V_\alpha$.

设 ψ 是 $\mathfrak{M}$ 上的函数, ψ 的支集 $\mathrm{supp}(\psi)$ 是 $\psi(p) \neq 0$ 的 p 点集合的闭包.

引理 5.1.3 如 K 是微分流形 $\mathfrak{M}$ 的紧子集, U 是 $\mathfrak{M}$ 中包含 K 的开集, 则必有 $\mathfrak{M}$ 中的非负可微分函数 ψ 适合 $\psi(p) > 0$, 当 $p \in K$; $\psi(p) = 0$, 当 $p \in \mathfrak{M} - U$, 且 ψ 有紧支集.

证 由于$\mathfrak{M}$是微分流形，任一 $p\in K$，可选取坐标邻域 U_p，其闭包 $\bar{U}_p$ 是紧的且包含于 U. 取 V_p 其闭包包含于 U_p. 由K是紧的，我们可以找出有限个如此的邻域 $V_1,\cdots,V_l$ 把 K 盖过. 对每一个坐标邻域 U_α，可以构造一个非负可微分函数 ϕ_α，使在 V_α 上，$\phi_\alpha>0$; $\operatorname{supp}\phi_\alpha\subset U_\alpha$ $(\alpha=1,\cdots,l)$. 于是 $\phi=\sum_{\alpha=1}^{l}\phi_\alpha$ 在K上大于零. $\operatorname{supp}\phi_\alpha\subset\bigcup_{\alpha=1}^{l}\operatorname{supp}\phi_\alpha\subset\bigcup_{\alpha=1}^{l}U_\alpha\subset U$. 由于 $\bigcup_{\alpha=1}^{l}\bar{U}_\alpha$ 是紧的，闭集 $\operatorname{supp}\phi$ 也是紧的. 引理得证.

设 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是微分流形$\mathfrak{M}$的开覆盖，可微分函数的集合 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 称为从属于 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的单位分解. 如果适合 (i) $0\leqslant\varphi_\alpha\leqslant1$; $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset V_\alpha$; (ii) $\{\operatorname{supp}\varphi_\alpha\}$ 是局部有限的; (iii) $\sum_{\alpha\in J}\varphi_\alpha(p)=1$ 对任意 $p\in\mathfrak{M}$.

定理 5.1.4 (单位分解定理) 任与微分流形 $\mathfrak{M}$ 的局部有限开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$，其中每一 $\bar{V}_\alpha$ 是紧的，则存在单位分解 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 从属于 $\{V_\alpha\}$.

证 据引理 5.1.2，存在开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$，$\bar{U}_\alpha\subset V_\alpha$. 使对每一 V_α，有一可非负微分函数 ϕ_α 在 $\bar{U}_\alpha$ 上大于 0，在 V_α 之外等于 0. 于是 $\sum_{\alpha\in J}\phi_\alpha(p)$，对任一 $p\in\mathfrak{M}$，至多属于有限个 V_α，故上和号中只有有限项不为 0. 由于 $\{U_\alpha\}$ 是开覆盖，故 $\sum_{\alpha\in J}\phi_\alpha>0$.

命 $\varphi_\alpha=\dfrac{\phi_\alpha}{\sum_{\beta\in J}\phi_\beta}$，显然 $0\leqslant\varphi_\alpha\leqslant1$ 及 $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset V_\alpha$，$\sum\varphi_\alpha=1$. 故定理证毕.

在 § 1.5 中，曾定义张量与外微分式等，它们与局部坐标及标架的选取无关，因此完全可以用此定义来定义一个流形$\mathfrak{M}$的点 p 上的张量与外微分式等。并且可用此定义$\mathfrak{M}$中的任

一开集 V 上的(可微分)张量场及外微分式.

在 $\mathfrak{M}$ 上的一个 r 次式 ω,在 $\mathfrak{M}$ 的一个图 (U,x), U 是坐标邻域, ω 在 U 上可表示为

$$\omega=\frac{1}{r!}a_{i_1\cdots i_r}(x(p))dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

如果所有的 $a_{i_1\cdots i_r}(x(p))=0$, 就说 ω 在 p 点为0.

一个 m 维微分流形 $\mathfrak{M}$ 称为**可定向的**, 如果存在一个连续的 m 次式 ω 无处为 0.

如 $\mathfrak{M}$ 是连通的, ω_1 与 ω_2 是 $\mathfrak{M}$ 中两个无处为 0 的 m 次式, 则有连续函数 f, 使 $\omega_1=f\omega_2$, 其中 f 或是恒 >0 或恒 <0. 如果恒有 $f>0$, 称 ω_1 与 ω_2 为等价的. $\mathfrak{M}$ 上给了一个定向, 即选取 m 次式的一个等价类.

定理 5.1.5 $\mathfrak{M}$ 是可定向的充要条件为能找到一个 $\mathfrak{M}$ 的图册 $\mathfrak{A}$, 使得 $\mathfrak{A}$ 中任两图 (U,x), $(\tilde{U},\tilde{x})$ 当 $U\cap\tilde{U}\neq\phi$ 时, 局部坐标变换 $\tilde{x}\circ x^{-1}$ 的函数行列式 $\det\dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial x}>0$ 在 $p\in U\cap\tilde{U}$.

证 我们无妨假定 $\mathfrak{M}$ 是连通的. 设 $\mathfrak{M}$ 有一无处为 0 的连续的 m 次式 ω, $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个图册, $(U,x)\in\mathfrak{A}$, 在 U 中取 m 次式

$$\omega_U=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

则当 ω 限制在 U 中时可写为 $\omega=a_U\omega_U$, a_U 是 U 上的连续函数. 我们要 $a_U>0$, 如不然,我们把坐标系 $(x^1,\cdots,x^m)$ 换为 $(-x^1,x^2,\cdots,x^m)$, 即把图 (U,x) 换为 (U,x_1)

$$x_1\circ x^{-1}:(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(-x^1,x^2,\cdots,x^m).$$

如原来 $a_U>0$, 则就取 $(U,x_1)=(U,x)$. 这个新的图册 $\{(U,x_1)\}$ 就是我们所要的. 如果有 (U,x) 与 $(\tilde{U},\tilde{x})$ 属于此新图册,而且 $\tilde{U}\cap U\neq\phi$ 则在 $\tilde{U}\cap U$ 上,有

$$\omega|_{\tilde{U}\cap U}=a_U\omega_U=a_{\tilde{U}}\omega_{\tilde{U}}$$

$\omega_{\tilde{U}} = \frac{a_U}{a_{\tilde{U}}}\omega_U$，同时 $\omega_{\tilde{U}} = \det\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\omega_U$，因此 $\det\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x} = \frac{a_U}{a_{\tilde{U}}} > 0$。

反之，若$\mathfrak{M}$的图册适合定理的条件，据引理 5.1.2，$\mathfrak{M}$ 是仿紧的，我们可以取一局部有限开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$，其中每一 U_α 包含于某一个 $\mathfrak{A}$ 的坐标邻域之中，并且 $\overline{U}_\alpha$ 是紧的。据单位分解定理，有从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$。由于 U_α 是坐标邻域，其坐标系设为 x，在 U_α 定义

$$\omega_\alpha = dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

及在 $\mathfrak{M}$ 中定义 m 次式 $\omega = \sum_{\alpha\in J}\varphi_\alpha\omega_\alpha$，此 ω 是可微分的。任意 $p\in\mathfrak{M}$，至多属于有限个 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_l}$，设 $U_{\alpha_j}\cap U_{\alpha_k}$ 中坐标变换为 $x_{\alpha_j}\circ x_{\alpha_k}^{-1}$，则有

$$\omega = \sum_{j=1}^{l}\varphi_{\alpha_j}\omega_{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{l}\left(\varphi_{\alpha_j}\det\frac{\partial x_{\alpha_j}}{\partial x_{\alpha_k}}\right)\omega_{\alpha_k},$$

于是在 p 点，$\sum_{j=1}^{l}\varphi_{\alpha_j}\det\frac{\partial x_{\alpha_j}}{\partial x_{\alpha_k}} > 0$，此即 ω 无处为 0，故 $\mathfrak{M}$ 是可定向的，定理得证。

注意：上定理的证明包含了一个可定向的微分流形存在一个可微分的 m 次式无处为 0。

§5.2 Stokes 定理

令 $R_+^m = \{(x^1,\cdots,x^m)\in R^m \mid x_1\geqslant 0\}$。设 V 是 R_+^m 的开集，函数 ϕ 称为在 V 可微分，如果有一 R^m 的开集 $V_1\supset V$ 及 V_1 中可微分函数 Φ，使 $\Phi|_V = \phi$。把 V 映入 R^n 的微分映照亦类似的定义。

现设$\mathfrak{M}$是具有可数基的 Hausdorff 空间，有一组图 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in J}\}$，其中 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的开覆盖，φ_α 把 U_α 同胚地映

为 R_+^m 的一开集，使得任意 $\alpha,\beta\in J$，当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 时，$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to R_+^m$ 是微分映照，我们称 $\mathfrak{M}$ 是具有边界的微分流形. $p\in\mathfrak{M}$ 称为**内点**，如有一图 (U,φ)，使得 $p\in U,\varphi(U)$ 是 R^m 的开集.如不是内点的点就称为**边界点**.令 $\partial\mathfrak{M}$ 代表 $\mathfrak{M}$ 的边界点的集合. 注意 $p\in\partial\mathfrak{M}$，当且仅当有一图 (U,φ)，使 $p\in U,\varphi(U)\subset R_+^m$，并且 $\varphi(p)=0$，对于如此的坐标系 φ，我们有

$$\partial\mathfrak{M}\cap U=\{p\in U\,|\,x^1=0,\text{其中 }\varphi(p)=(x^1,\cdots,x^m)\}.$$

显然 R^m 到 R^{m-1} 的映照 $(x^1,\cdots,x^m)\longmapsto(x^2,\cdots,x^m)$ 诱导出 $\partial\mathfrak{M}\cap U$ 到 R^{m-1} 的一开集的一同胚映照 ϕ. 此外，若 $(U,\varphi),(U_1,\varphi_1)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的两个图，$\partial\mathfrak{M}\cap U\cap U_1\neq\phi$，则当令 ϕ,ϕ_1 为相应的在 $\partial\mathfrak{M}\cap U,\partial\mathfrak{M}\cap U_1$ 的同胚映照时

$$\phi_1\circ\phi^{-1}:\phi(\partial\mathfrak{M}\cap U\cap U_1)\to R^{m-1}$$

是微分映照

$$\varphi_1\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap U_1)\to R^m,$$

限制在 $x^1=0$，因此 $\phi_1\circ\phi^{-1}$ 是微分映照，此即

定理 5.2.1 微分流形 $\mathfrak{M}$ 的边界 $\partial\mathfrak{M}$ 有一自然的微分结构，使之成为微分流形. 此外，$\partial\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的闭子流形，并且对于 $p\in\partial\mathfrak{M}$ 的 $\partial\mathfrak{M}$ 的切空间 $(\partial\mathfrak{M})_p$ 是 $\mathfrak{M}$ 的在 P 点切空间的子空间.

注意，我们说 f 在 $p\in\partial\mathfrak{M}$ 是可微分的，即有一图 (U,x)，$p\in U$，使 $f:U\to R$（或 C）是可微分的. 根据定义，$f\circ x^{-1}$ 在 $x(U)$ 的 R^m 的一邻域可微分，因此对于向量 $X=a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$，$Xf$ 是有定义的. 如此的向量组成的实线性空间，即 $\mathfrak{M}$ 在 p 点的切空间 $\mathfrak{M}_p$. $(\partial\mathfrak{M})_p$ 的切空间是由向量 $Y=\sum_{i=2}^m a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ 组成的实线性空间，显然是 $\mathfrak{M}_p$ 的子空间。

对任一点 $p\in\mathfrak{M}$，切向量 $X\in\mathfrak{M}_p$ 称为正的（或者是 $\partial\mathfrak{M}$ 的内法线），若对任一在 p 点邻域的可微分函数 $f\geqslant 0$，$f(p)=0$，必有 $Xf\geqslant 0$，并且至少有一个 $f\geqslant 0$，$f(p)=0$ 使得 $Xf>0$. 如 p 是 $\mathfrak{M}$ 的内点，则在 p 点的邻域的可微分函数适合 $f\geqslant 0$ 而 $f(p)=0$，即在 p 点是相对的极小值，必定所有 f 的一阶偏导数在 p 点等于 0，因而 $Xf(p)=0$，即如此的向量 X 是不存在的.

命题 5.2.2 设 $p\in\partial\mathfrak{M}$ 而 (U,x) 是 $\mathfrak{M}$ 的可容许图，$p\in U$，使得 $x(U)\subset R^m_+$ 且 $x(p)=0$，设

$$X=C^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,$$

则 X 为正的，当且仅当 $C^1>0$.

证 如 $f\geqslant 0$，在 p 的邻域可微分，且 $f(p)=0$. 令 $f\circ x^{-1}=h$，则在 $x=0$ 的邻域有 Taylor 展开式

$$h(x)=\frac{\partial h(0)}{\partial x^i}x^i+o(|x|).$$

据假设，$h(x)\geqslant 0$；当 $x^1\geqslant 0$，必须 $\dfrac{\partial h(0)}{\partial x^j}=0, j=2,\cdots,m$；$\dfrac{\partial h(0)}{\partial x^1}\geqslant 0$. 因此有 $Xf(p)=C^1\dfrac{\partial h(0)}{\partial x^1}$，由此可知，$X$ 为正必须 $C^1>0$，而若 $C^1>0$，则 $Xx^1>0$，定理证毕.

命题 5.2.3 若 $p\in\partial\mathfrak{M}$，X_1 与 X_2 是两个在 p 点的正向量，则有一数 $\lambda>0$，使得 $X_1-\lambda X_2\in(\partial\mathfrak{M})_p$.

证 由上命题的证明中知道，$X_1=C_1^i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$； $C_1^1>0$，$X_2=C_2^i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$；$C_2^1>0$，取 $\lambda=\dfrac{C_1^1}{C_2^1}$ 便得定理.

设 p 为 $\mathfrak{M}$ 的边界点，在 p 点的一次式 ω 称为**正的**，若 $\omega(X)>0$，对所有的正的 $X\in\mathfrak{M}_p$. 由上之命题可知，如果在 p 的坐标邻域 U，取坐标系 φ 使 $\varphi(p)=(0,x^2,\cdots,x^m)$，$\omega$

必为 Cdx^1 的形式，而且 $C>0$.

定理 5.2.4 $\mathfrak{M}$ 的定向诱导出 $\partial\mathfrak{M}$ 的一自然定向.

证明 设 ω 是 $\mathfrak{M}$ 中无处为 0 的 m 次式，我们选取 $\partial\mathfrak{M}$ 的图册$\{(V,\varphi)\}$使得：$\varphi(p)=(x^2(p),\cdots,x^n(p))$. 令

$$\theta_V = dx^2\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

则对 p 点任一正的一次式 χ，有

$$\chi\wedge\theta_V = -\lambda\omega,$$

其中 $\lambda>0$. 由此可知，如$(\tilde{V},\tilde{\varphi})$为图册中另一组图，$p\in V\cap\tilde{V}$，$\theta\tilde{V}$，$\tilde{\chi}$ 为相应的外微分式，由于 $V=U\cap\partial\mathfrak{M}$，$\tilde{V}=\tilde{U}\cap\partial\mathfrak{M}$. (U,x) 与 $(\tilde{U},\tilde{x})$是 $\mathfrak{M}$ 的可容许图，局部坐标变换 $\tilde{x}\circ x^{-1}$ 为

$$\tilde{x}^j = f^j(x^1,\cdots,x^m),\ j=1,\cdots,m.$$

由于 $x^1=0$ 时，$\tilde{x}^1=0$. 因此在 $p\in\partial\mathfrak{M}$ 时有

$$\det\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^1}\det\frac{\partial(\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^m)}{\partial(x^2,\cdots,x^m)},$$

因此在 $p\in\partial\mathfrak{M}$，有 $d\tilde{\chi}=\dfrac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^1}d\chi$，必须$\dfrac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^1}>0$. 由

$$\theta_{\tilde{V}} = \det\frac{\partial(\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^m)}{\partial(x^2,\cdots,x^m)}\theta_V \text{ 可知}$$

$$\det\frac{\partial(\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^m)}{\partial(x^2,\cdots,x^m)} = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}>0.$$

据定理 5.1.4 的证明，知存在 $\partial\mathfrak{M}$ 的$m-1$ 次式 θ，使得在 V 中，$\theta=h_V\theta_V$，$h_V>0$，故 $\partial\mathfrak{M}$ 有定向 θ，这是由 ω 诱导的自然定向. 定理证毕.

注意：通常我们在 R_+^m 中取 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 为定向，在 R^{m-1} 中取 $dx^2\wedge\cdots\wedge dx^m$ 为定向，据上述定理诱导的 ∂R_+^m 的定向与通常的定向相反.

给定 $\mathfrak{M}$ 的一个定向，即选取一个连续的 m 次式 ω 为代表的等价类. 对 $\mathfrak{M}$ 中任一开集 U，ω 限制在 U 中时，给与 U 的

一个定向．若U是 $\mathfrak{M}$ 的坐标邻域，(U,x)是 $\mathfrak{M}$ 的图，则 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 是U中的m次式，它必能写为 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m = f\omega$，其中 $f\neq 0$．如 $f>0$，即 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 与ω属于同一等价类，我们以 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m>0$ 表之；如 $f<0$，即 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 与ω不属于同一的等价类，我们以 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m<0$ 表之．

现设 $\varphi=h(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 是在U中的m次式，并且 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m>0$．定义$\varphi$在$U$中的积分为

$$\int_U\varphi=\int_{x(U)}h(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=\int_{x(U)}h(x)dx^1\cdots dx^m,$$

末一积分是普通的积分（如果存在的话）．若 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m<0$，则定义

$$\begin{aligned}\int_U\varphi&=\int_{x(U)}h(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\&=-\int_{x(U)}h(x)dx^1\cdots dx^m.\end{aligned}$$

在$\mathfrak{M}$上外微分式ω的支集 $\operatorname{supp}\omega$ 是$\mathfrak{M}$中的点，使 $\omega\neq 0$ 的点集的闭包．现在我们可以定义一可定向微分流形$\mathfrak{M}$中有一紧支集的连续的m次式ω的积分．取$\mathfrak{M}$的一图册$\{(U,x)\}$，使得此图册中的局部坐标变换的函数行列式皆大于零．此外，不妨假定其中的开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U\}$是局部有限，而且每一开集U的闭包是紧的，令$\{\eta_U\}$是从属于$\mathfrak{U}$的单位分解，在U中可写为

$$\omega=h_U\theta_U;\ \theta_U=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中h_U在U中连续，定义ω在$\mathfrak{M}$的积分为

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}}\omega&=\sum_{U\in\mathfrak{U}}\int_{x(U)}(\eta_U\circ h_U)\circ x^{-1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\&=\sum_{U\in\mathfrak{U}}\int_{x(U)}(\eta_U\circ x^{-1})(x)(h_U\circ x^{-1})(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\&=\sum_{U\in\mathfrak{U}}\int_U\eta_U(p)\omega.\end{aligned}\qquad(5.2.1)$$

此定义与单位分解$\{\eta_U\}$的选取无关，如另有一从属于局部有

限的覆盖 $\mathfrak{V}=\{V\}$的单位分解 $\{\zeta_V\}$，这里 $\bar{V}$ 是紧的，而且包含于一坐标邻域中，则 $\{\eta_U\zeta_V\}$ 是从属于 $\{U\cap V\}$ 的单位分解. 由于 suppω 是紧的，故 $\mathfrak{U}$ 中至多有有限个开集与其相交，对 $\mathfrak{V}$ 亦然，因此

$$\sum_{\substack{U\in\mathfrak{U}\\V\in\mathfrak{V}}}\int_{x(U\cap V)}(\eta_U\zeta_V h_U)\circ x^{-1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

$$=\sum_{\substack{U\in\mathfrak{U}\\V\in\mathfrak{V}}}\int_{U\cap V}\eta_U(p)\zeta_V(p)\omega$$

$$=\sum_{U\in\mathfrak{U}}\int_U\eta_U\left(\sum_{V\in\mathfrak{V}}\zeta_V\right)\omega=\sum_{U\in\mathfrak{U}}\int_U\eta_U\omega.$$

同理可证

$$\sum_{\substack{U\in\mathfrak{U}\\V\in\mathfrak{V}}}\int_{x(U\cap V)}(\eta_U\zeta_V h_U)\circ x^{-1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

$$=\sum_{V\in\mathfrak{V}}\int_V\eta_V\omega.$$

定理5.2.5 (Stokes 定理) 设 $\mathfrak{M}$ 是可定向的微分流形，边界 $\partial\mathfrak{M}$ 具有诱导定向，ω 是有紧支集的可微分的 $m-1$ 次形式，则有

$$\int_{\partial\mathfrak{M}}\omega=\int_{\mathfrak{M}}d\omega.$$

特别是当 $\mathfrak{M}$ 为紧时，上式对所有可微分 $m-1$ 次式 ω 成立.

证 取图册 $\{(U,x)\}$ 使适合定义积分时所需要的条件. 取 $\{\eta_U\}$ 为从属于$\{U\}$的单位分解. 因为 ω 有紧支集，$\eta_U\omega$ 最多有有限个不为零，故有

$$\int_{\mathfrak{M}}d\omega=\int_{\mathfrak{M}}d(\sum\eta_U\omega)=\sum\int_{\mathfrak{M}}d(\eta_U\omega),$$

因此，只须证明

$$\int_{\partial\mathfrak{M}}\eta_U\omega=\int_{\mathfrak{M}}d(\eta_U\omega).$$

(i)当 $U\cap\partial\mathfrak{M}=0$ 时，则 $\int_{\partial\mathfrak{M}}\eta_U\omega=0$. 此时 U 与 R^n 的一开集同胚，设对于局部坐标系为 x，在 U 中

$$\eta_U\omega=\sum_{j=1}^{m}h_j(x)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中 $h_j(x)$ 在 $x(U)$ 中有紧致支集. 由于

$$d(\eta_U\omega)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial h_j}{\partial x^j}(-1)^{j-1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

故有

$$\int_{\mathfrak{M}}d(\eta_U\omega)=\int_U d(\eta_U\omega)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{x(U)}\frac{\partial h_j}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{R^m}\frac{\partial h_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^m=0,$$

这是因为对每一固定的 j，当 h_j 有紧支集时，

$$\int_R\frac{\partial h_j}{\partial x^j}dx^j=0.$$

(ii) $U\cap\partial\mathfrak{M}\neq\phi$，此时 $x(U)$ 是 R_+^m 的开集，并且

$$x(U)\cap\{x\in R_+^m\,|\,x^1=0\}\neq\phi,$$

于是在 U 中

$$\int_{\mathfrak{M}}d(\eta_U\omega)=\int_U d(\eta_U\omega)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{R_+^m}\frac{\partial h_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^m.$$

当 $j\neq1$ 时，

$$\int_{R_+^m} \frac{\partial h_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^m = 0,$$

因此，

$$\int_{\mathfrak{M}} d(\eta_U \omega) = \int_{R_+^m} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} dx^1 \cdots dx^m$$

$$= \int_{R^{m-1}} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^1 \cdots dx^m$$

$$= -\int_{R^{m-1}} h_1(0, x_2, \cdots, x_m) dx^2 \cdots dx^m$$

$$= \int_{U \cap \partial \mathfrak{M}} \eta_U \omega = \int_{\partial \mathfrak{M}} \eta_U \omega.$$

注意，这里 $\partial \mathfrak{M}$ 的定向是据定理 5.2.4 诱导定向，定理至此证毕。

§5.3 Frobenius 定 理

设 $\mathfrak{M}$ 是 m 维微分流形，一个 $\mathfrak{M}$ 上秩为 r 的微分系统 $\mathscr{D}$ 是任一点 $p \in \mathfrak{M}$ 给与一个 r 维线性子空间 $\mathscr{D}_p \subset \mathfrak{M}_p$，并且有一 p 的邻域 U，存在 r 个可微分向量场 $X_1, \cdots, X_r$ 使得在任一点 $q \in U$，$\mathscr{D}_q$ 由 $(X_1)_q, \cdots, (X_r)_q$ 生成的。

对于给与的秩为 r 的微分系统 $\mathscr{D}$，n 维微分子流形 $f: \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$，称为 $\mathscr{D}$ 的积分(或积分流形)，如任意 $p \in \mathfrak{N}$，

$$f_*(\mathfrak{N}_p) \subset \mathscr{D}_{f(p)}.$$

由此可知，积分流形 $\mathfrak{N}$ 的子流形仍然是积分流形。$\mathscr{D}$ 称为完全可积，如 $\forall p \in \mathfrak{M}$，有一图 (U, x)，$p \in U$，使得任与常数 $c^j, j = r+1, \cdots, m$，由

$$U_c = \{p \in U \mid x^j(p) = c^j; j = r+1, \cdots, m\}, \quad (5.3.1)$$

定义的子流形是 $\mathscr{D}$ 的积分流形。(U, x) 称为 p 点的**特性图**。

命题 5.3.1 设 $\mathscr{D}$ 是完全可积的秩为 r 的微分系统，$p\in\mathfrak{M}$，(U,x)为 p 点的特性图. 若 $f:W\to U$ 是连通的积分流形，则有一组数 $c=(c^{r+1},\cdots,c^m)$，使得 $f(W)\subset U_c$.

证 首先 U 是$\mathfrak{M}$的子流形，而U_c是U的子流形，$\forall q\in U_c$，有 $x(q)=(x^1(q),\cdots,x^r(q),c^{r+1},\cdots,c^m)$，$U_c$ 的切空间由 $\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^r}$ 生成，据假定 $(U_c)_q\subset\mathscr{D}_q$，但 $(U_c)_q$ 与 $\mathscr{D}_q$ 皆是 r 维，必定有 $(U_c)_q=\mathscr{D}_q$. 如果 $f:W\to U$ 是积分流形，则对 W 的一可容许图 (V,y)，在 V 点的切空间由 $\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}$ 所生成，由于W是积分流形

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\subset\mathscr{D}_q=(U_c)_q,$$

因此必有

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^\alpha}=0;\ j=r+1,\cdots,m.$$

这表示 $x^j=c^j$（常数），$j=r+1,\cdots,m$. 由于W是连通的 $(x^j\circ f)(p)=c^j$（常数）；$j=r+1,\cdots,m$，命题得证.

特别是子流形 U_c，当 c 充分小时是不依赖于 p 的特性图 (U,x) 的选取；此即如有另一 p 的特性图 $(\tilde{U},\tilde{x})$，坐标变换 $\tilde{x}\circ x^{-1}$ 必须为下列形式

$$\tilde{x}^j(q),\ j=r+1,\cdots,m;q\in U_c,$$

只与 $x^{r+1},\cdots,x^m$ 有关. 因为 $q\in U_c$ 的切空间的基 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_q,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^r}\right)_q$ 对应 $\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^k}\right)_q\in\mathscr{D}_q=(\tilde{U}_c)_q$，$j=1,\cdots,r$，故必须$\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^j}=0$，$k=r+1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,r$，即 $\tilde{x}^k\circ x^{-1}$ 不包含 $x^1,\cdots,x^r$，当 $k=r+1,\cdots,m$.

设$\mathscr{D}$为秩 r 的微分系统，$\mathscr{D}$称为**对合的**. 如果 $X_1,\cdots,$

X_r 是邻域 U 的可微分向量场，在每一点 p 产生 $\mathscr{D}_p$，则必定有 $[X_\mu, X_\nu]_p \in \mathscr{D}_p$，$\mu, \nu = 1, \cdots, r$.

此定义等价于：若 $\mathfrak{M}$ 中任一开集 U 的两个可微分向量场 X, Y 适合 $X_p, Y_p \in \mathscr{D}_p$，则 $[X, Y]_p \in \mathscr{D}_p$，对任一点 $p \in U$.

命题 5.3.2 如 $\mathscr{D}$ 是对合的微分系统，秩为 r，则任一点 $p \in \mathfrak{M}$ 有一邻域 U 及在其中可微分向量场 $X_1, \cdots, X_r$，使得任一点 $q \in U$；$X_1, \cdots, X_r$ 在 q 点生成 $\mathscr{D}_q$. 此外 $[X_\mu, X_\nu] = 0$，在 U 上成立.

证 设 $p \in \mathfrak{M}$，取一可容许图 (U, x)，$p \in U$，且在 U 中有可微分向量场 $Y_1, \cdots, Y_r$ 生成 $\mathscr{D}_q$，对 $\forall q \in U$. 设

$$Y_\mu = a^i_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$m \times r$ 矩阵 $A = (a^i_\mu)$ 必须秩为 r，无妨假定

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ B \end{pmatrix},$$

其中 $A_1 = (a^\mu_\nu)_{1 \leqslant \mu, \nu \leqslant r}$ 是非异的. 令

$$X_\nu = \overset{-1}{a}{}^\mu_\nu Y_\mu,$$

其中 $(\overset{-1}{a}{}^\mu_\nu)$ 为 A_1 的逆方阵，则 X_ν 有表示式

$$X_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \sum_{j=r+1}^{m} c^j_\nu \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

此外，X_ν 在任一点 $q \in U$ 生成 $\mathscr{D}_q$. 由于 $\mathscr{D}$ 是对合的，有

$$\begin{aligned}[X_\mu, X_\nu] &= \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda^\alpha X_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{m} \lambda^\alpha c^j_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j},\end{aligned}$$

但是，由计算

$$[X_\mu, X_\nu] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sum_{j=r+1}^{m} c_\mu^j \frac{\partial}{\partial x^j},\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \sum_{j=r+1}^{m} c_\mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \sum_{j=r+1}^{m} \left[\frac{\partial c_\nu^j}{\partial x^\mu}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial c_\mu^j}{\partial x^\nu} + \sum_{l=r+1}^{m} \left(c_\mu^l \frac{\partial c_\nu^j}{\partial x^l} - c_\nu^l \frac{\partial c_\mu^j}{\partial x^l} \right)\right] \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

比较此两式，必须有 $\lambda^\alpha = 0$，因此

$$[X_\mu, X_\nu] = 0,$$

命题证毕。

定理 5.3.3 设 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 p 点的邻域 U 中的可微分向量场，在 U 的每一点是线性独立的，并且 $[X_\nu, X_\mu] = 0$，则可取 p 的坐标邻域 $V \subset U$，及选取局部坐标 x，使得 $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$，$\mu = 1, \cdots, r$.

证 设在 p 的坐标邻域 U 中，$x(p) = 0$，

$$X_1 = \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j};\ x \in U_0 = x(U).$$

熟知（例如见吴新谋[12]第一册第四章 § 1）方程

$$\xi^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = 0$$

在 $U_\varepsilon = \{x \in R^m \big| |x^j| < \varepsilon,\ j = 1, \cdots, m\}$ 有 $m-1$ 个独立的解.

$$\varphi^2(x^1, \cdots, x^m), \cdots, \varphi^m(x^1, \cdots, x^m),$$

而且其函数矩阵在 U_ε 之秩为 $m-1$（当 ε 充分小时）. 取 U_ε 中的函数 $\varphi^1(x^2, \cdots, x^m)$ 使得函数方阵 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 在 U_ε 非异，则对于坐标变换

$$\tilde{x}^j = \varphi^j(x)$$

有

$$\tilde{\xi}^j = \xi^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} = \begin{cases} \xi^k \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^k}, & j = 1, \\ 0 \quad , & j = 2, \cdots, m. \end{cases}$$

据假设 X_1 在每点 x 不为 0，因此 $\tilde{\xi}^1 \neq 0$. 今无妨假定原来的 X_1 中，就有 $\xi^1(x) \neq 0, \xi^j = 0, j = 2, \cdots, m$ 对任一 $x \in U_x$. 再作坐标变换

$$\tilde{x}^1 = \int_0^{x^1} \frac{dt}{\xi^1(t, x^2, \cdots, x^n)},$$

$$\tilde{x}^j = x^j; \quad j = 2, \cdots, m,$$

则有

$$\tilde{\xi}^1 = \xi^i \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} = 1,$$

$$\tilde{\xi}^j = \xi^j, \; j = 2, \cdots, m.$$

此表示我们已选取坐标，使

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

假定我们已经选取坐标系使得

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, X_s = \frac{\partial}{\partial x^s}, \quad (s < r),$$

而 $X = \eta^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是任一向量场使 $[X_\mu, X] = 0, \mu = 1, \cdots, s$，此即 $\dfrac{\partial \eta^i}{\partial x^\mu} = 0, \; \mu = 1, \cdots, s$. 这就是表示 $\eta^i(x)$ 不包含 $x^1, \cdots, x^s$. 如同上面一样可证，可选取适当坐标使

$$\eta^{s+1} = 1, \; \eta^{s+2} = \cdots = \eta^m = 0,$$

即 $X=\sum_{j=1}^{s}\eta^j\frac{\partial}{\partial x^j}+\frac{\partial}{\partial x^{s+1}}$，再作坐标变换

$$\tilde{x}^j=x^j+h^j(x^{s+1},\cdots,x^m), j=1,\cdots,s,$$
$$\tilde{x}^j=x^j, j=s+1,\cdots,m,$$

则有

$$\tilde{\eta}^j=\eta^j+\frac{\partial h^j}{\partial x^{s+1}}；\text{当 } j=1,\cdots,s,$$

$$\tilde{\eta}^j=\eta^j，\text{当 } j=s+1,\cdots,m.$$

我们选取 h^j，使

$$-\frac{\partial h^j}{\partial x^{s+1}}=\eta^j,\quad j=1,\cdots,s,$$

便有 $X=\frac{\partial}{\partial x^{s+1}}$，定理证毕。

定理 5.3.4 (Frobenius 定理的第一种形式) 设$\mathscr{D}$是微分流形$\mathfrak{M}$的微分系统，则$\mathscr{D}$是完全可积的充要条件为$\mathscr{D}$是对合的。

证 从命题 5.3.2 与定理 5.3.3 中可知，若$\mathscr{D}$是对合的，对 $\forall p\in\mathfrak{M}$，有坐标邻域 U，有一组可微分向量场 $X_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $(\mu=1,\cdots,r)$，使得 $\{X_\mu\}$ 在任一点 $q\in U$ 生成 $\mathscr{D}_q$。因此由(5.3.1)定义了子流形 U_c 是积分流形，其每一点的切空间，由 X_μ 生成，因此$\mathscr{D}$是完全可积的。反之，如$\mathscr{D}$全完可积，U_c 的任一点 q 的切空间由 $X_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 生成，而且等于 $\mathscr{D}_q$，显然有 $[X_\mu,X_\nu]=0\in\mathscr{D}_q$，故 $\mathscr{D}$ 是对合的。

注意上面的证明中，实际上只用到 $\mathfrak{M}$ 是 C^2 流形便足够。

现在考虑 $\mathfrak{M}$ 上的 $m-r$ 个可微分一次式 $\omega^a, a=r+1,\cdots,m$，在 $\forall p\in\mathfrak{M}$ 是线性独立的。令

$$\mathscr{D}_p = \{X \in \mathfrak{M}_p \mid \omega^a(X) = 0; a = r+1, \cdots, m\}.$$

今在 p 的邻域 V 中写

$$\omega^a = \eta^a_j(x) dx^j, \quad a = r+1, \cdots, m,$$

其中 $\eta = (\eta^a_j)$ 是 $(m-r) \times m$ 矩阵，且其秩处处为 $m-r$，而且矩阵之元素 $\eta^a_j(x)$ 是可微分的. 必存在秩为 r 的 $m \times r$ 矩阵 $\xi = (\xi^j_\mu)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant \mu \leqslant r}}$，其元素 ξ^j_μ 是可微分函数，使得 $\eta\xi = 0$，亦即 $\eta^a_j \xi^j_\mu = 0$，$a = r+1, \cdots, m$，$\mu = 1, \cdots, r$. 今令 $X_\mu = \xi^j_\mu \frac{\partial}{\partial x^j}$，则有 $\omega^a(X_\mu) = 0$，并且在每一点 $q \in U$，$\mathscr{D}_q$ 由 X_μ 生成，即 $\{\mathscr{D}_q\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的微分系统. 可选取适当的坐标系使得 $\eta = (A, B)$，其中 A 是 $m-r$ 阶非异方阵，可作 $\omega^a (a = r+1, \cdots, m)$ 的线性组合，使得在 U 中

$$\omega^a = dx^a + \sum_{\mu=1}^{r} C^a_\mu dx^\mu, \tag{5.3.2}$$

于是可取

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \sum_{a=r+1}^{m} C^a_\mu \frac{\partial}{\partial x^a}, \mu = 1, \cdots, r, \tag{5.3.3}$$

适合 $\omega^a(X_\mu) = 0$，而对任一 $q \in U$，$\mathscr{D}_q$ 由 X_μ 生成.

定理 5.3.5 (Frobenius 定理的第二种形式) 设 $\omega_{r+1}, \cdots, \omega_m$ 是 $\mathfrak{M}$ 中线性独立的一次式，$\mathscr{D}$ 是由它们所定义的微分系统，则 $\mathscr{D}$ 完全可积的充要条件为：任一 $q \in \mathfrak{M}$ 有一邻域 U 及 U 中 $(m-r)^2$ 个可微分一次式 α^a_b，使得

$$d\omega^a = \sum_{b=r+1}^{m} \omega^b \wedge \alpha^a_b, \quad a = r+1, \cdots, m. \tag{5.3.4}$$

证 首先注意，如果 ω^a 作线性组合，(5.3.4)的形式不改变，因为

$$d\left(\sum_{b=r+1}^{m} A_b^a\omega^b\right) = \sum dA_b^a\omega^b + \sum A_b^a d\omega^b$$

$$= \sum_{b=r+1}^{m} \omega^b \wedge \left(-dA_b^a + \sum_{c=r+1}^{m} A_c^a \alpha_b^c\right),$$

这里 A_b^a 并不要求是常数，只要是可微分函数就可以了.

如果 ω^a 产生的微分系统完全可积，对任一点 $p \in \mathfrak{M}$ 有特性图(U,x)，此时可选取$\mathscr{D}_q(q \in U)$的基为 $X_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$. 如我们取 ω^a 为(5.3.2)的形式，由 $\omega^a(X_\mu) = 0$，必须 $C_\mu^a = 0$，此时(5.3.4)自然满足。

反之，如(5.3.4)成立，则由(1.5.14)可知

$$2d\omega^a(X_\mu, X_\nu) = X_\mu\omega^a(X_\nu) - X_\nu\omega^a(X_\mu) - \omega^a([X_\mu, X_\nu]).$$

由(5.3.4)知道，当 $\omega^a(X_\mu) = 0$ 时，必有 $d\omega^a(X_\mu, X_\nu) = 0$，因此从上式就有

$$\omega^a([X_\mu, X_\nu]) = 0,$$

此即 $[X_\mu, X_\nu] \in \mathscr{D}_q$，对 $\forall q \in U$，故$\mathscr{D}$是完全可积的。定理证毕。

定理 5.3.6 (Frobenius 定理的第三种形式) 设 V 是 R^m的开集，V_1 是 R^n 的开集，$f_\mu: V \times V_1 \to R^m$ 是微分映照，$\mu = 1, \cdots, n$. $\forall\ t_0 \in V_1; x_0 \in V$，有一 t_0 的邻域 U_1 存在微分映照 $x: U_1 \to V$ 使

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^j(t)}{\partial t^\mu} = f_\mu^j(x(t), t), & j = 1, \cdots, m, \\ x^j(t_0) = x_0^j, & \mu = 1, \cdots, n, \end{cases} \qquad (5.3.5)$$

成立的充要条件为

$$\frac{\partial f_\nu^j(x,t)}{\partial t^\mu} + \frac{\partial f_\nu^j(x,t)}{\partial x^k} f_\mu^k(x,t)$$

$$= \frac{\partial f_\mu^j(x,t)}{\partial t^\nu} + \frac{\partial f_\mu^j(x,t)}{\partial x^k} f_\nu^k(x,t). \qquad (5.3.6)$$

证 如果 $x^j(t)$ 存在，则必须

$$\frac{\partial^2 x^j(t)}{\partial t^\nu \partial t^\mu} = \frac{\partial^2 x^j(t)}{\partial t^\mu \partial t^\nu},$$

此即为(5.3.6). 反之，如 (5.3.6) 成立，

$$\omega^j = dx^j - f_\mu^j(x,t)dt^\mu \qquad (5.3.7)$$

是在 $V\times V_1$ 中定义的m个线性独立的微分式，由它定义的微分系统命之为$\mathscr{D}$，其秩为r. 由(5.3.3)可知，对任意 $p\in V\times V_1$, $\mathscr{D}_p$ 由

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial t^\mu} + f_\mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (5.3.8)$$

所生成，由 (5.3.6) 可知

$$[X_\mu, X_\nu] = 0,$$

故$\mathscr{D}$是完全可积的.

$V\times V_1$ 的任一点 (x_0,t_0) 必有一特性邻域 $U\times U_1$，即有坐标变换 $(x,t)\to(u,v)$ 使得

$$W = \{(x,t)\in V\times V_1 \mid u^1(x,t)=0,\cdots,u^m(x,t)=0\}$$

是通过(x_0,t_0)点的积分流形，由于$\frac{\partial}{\partial v^\mu}$是$W$在 (x,t) 点的切空间的基，而 $W_{(x,t)} = \mathscr{D}_{(x,t)} \subset (V\times V_1)_{(x,t)}$，故必须有 $\frac{\partial}{\partial v^\mu} = B_\mu^\nu X_\nu$，因此 $\omega^j\left(\frac{\partial}{\partial v^\mu}\right) = 0$. 此外，显然有 $du^i\left(\frac{\partial}{\partial v^\mu}\right) = 0$. 熟知，若有两个线性空间的映照：$(V\times V_1)_{(x,t)} \to R^m$ 有

相同的核，则此两映照只差 R^m 的一线性变换，即

$$du^i = A^i_k\omega^k = A^i_k dx^k - A^i_k f^k_\mu(x,t)dx^\mu,$$

其中 (A^i_k) 是非异．由此知 $\dfrac{\partial(u^1,\cdots,u^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}$ 非异，据隐函数存在定理知，有 t_0 的邻域使得 $u^i(x,t)=0$ 有解

$$x^i=\xi^i(t),x^i_0=\xi^i(t_0),$$

此即在 (x_0,t_0) 邻域中积分流形 W 可表示为

$$x^i-\xi^i(t)=0.$$

令 $F^i(x,t)=x^i-\xi^i(t)$，由此知在 (x,t) 点的 W 的法空间是由

$$dF^i = dx^i - \frac{\partial\xi^i}{\partial t^\mu}dt^\mu \tag{5.3.9}$$

所生成，它的切空间即为 $dF^i(X)=0$ 的所有向量 X 所生成．由(5.3.8)可知

$$Y_\mu = \frac{\partial}{\partial t^\mu} + \frac{\partial\xi^i}{\partial t^\mu}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.3.10}$$

使 $\omega^i(Y_\mu)=0$，因此 W 的切空间 $W_{(x,t)}$ 由 $\{Y_\mu\}$ 生成，但 W 是积分流形，必有 $Y_\mu\in\mathscr{D}_{(x,t)}$，因此

$$Y_\mu = a^\nu_\mu X_\nu.$$

以(5.3.8)代入上式，比较 $\dfrac{\partial}{\partial t^\mu}$ 的系数，必须 $a^\nu_\mu=\delta^\nu_\mu$，即 $X_\mu=Y_\mu$，故有

$$\frac{d\xi^i}{dt^\mu}=f^i_\mu(x,t),$$

因此 W 的定义函数 $x^i=\xi^i(t)$ 适合微分方程(5.3.5)．到此定理证毕．

可以证明，适合初值 $x^i_0=\xi^i(t_0)$ 的方程之解 $x^i=\xi^i(t)$ 是唯一的．

以上关于 Frobenius 定理的证明，实际上在 C^2 微分流形的 C^1 微分系统成立．如果$\mathfrak{M}$是实解析流形，且微分系统也是实解析的，上面得出的结果也是实解析的．此外，可以在复流形上对复坐标定义全纯系统，若此系统为完全可积，则结果也是全纯的．

第一种形式的 Frobenius 定理见 Chevalley[3]．

下面作一些 Frobenius 定理的应用．

定理 5.3.7 设 V 是 R^m 的开集，G 是矩阵李群，$\Gamma^\alpha_{\beta j}$ 是 V 中 G 型平联络．则对任一点 $x_0 \in V$，有一邻域 U 及一非异方阵 $A = (A^\alpha_\beta)$ 使得

$$\Gamma^\alpha_{\beta j} = \overset{-1}{A}{}^\alpha_\gamma \frac{\partial A^\gamma_\beta}{\partial x^j}.$$

证 若 $\Gamma^\alpha_{\beta j}$ 为平联络，则有

$$R^\alpha_{\beta jk} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta j}}{\partial x^k} + \Gamma^\gamma_{\beta k}\Gamma^\alpha_{\gamma j} - \Gamma^\gamma_{\beta j}\Gamma^\alpha_{\nu k} = 0. \qquad (5.3.11)$$

我们求解方程

$$\frac{\partial A^\gamma_\beta}{\partial x^j} = A^\gamma_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta j}.$$

根据定理 5.3.6 可知，上方程的积分条件为

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(A^\gamma_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(A^\gamma_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta k}),$$

此即

$$A^\gamma_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta j}}{\partial x^k} + A^\gamma_\delta \Gamma^\delta_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{\beta j} = A^\gamma_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta k}}{\partial x^j} + A^\gamma_\delta \Gamma^\delta_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{\beta k},$$

即要求

$$A^\gamma_\alpha \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta j}}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{\delta j}\Gamma^\delta_{\beta k} - \Gamma^\alpha_{\delta k}\Gamma^\delta_{\beta j} \right) = 0.$$

据 (5.3.11) 可知上述条件必成立，故给与初值 $(A^\alpha_\beta(x_0)) =$

$(A_{0\beta}^{\alpha})$是非异时，在 x_0 的邻域 U 有解 $A_\beta^\alpha(x)$，当 U 充分小时，$A_\beta^\alpha(x)$在 U 中非异，故定理得证。

定理 5.3.8 设 V 是 R^m 的开集，g_{jk} 是对称、非异、可微分张量场，若由 g_{jk} 定义的 Riemann 曲率张量等于零，则任一点 $x_0\in V$，有邻域 U，使得在 U 中选取适当的坐标变换 $\tilde{x}^i=\tilde{x}^i(x)$，使

$$\tilde{g}_{jk}=g_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial\tilde{x}^k}$$

为常数。

证 据上定理知，必有 x_0 的邻域 U 及 $A_k^i(x)$ 使

$$\left\{\begin{matrix} i \\ kl \end{matrix}\right\}=\overset{-1}{A}{}_r^i\,\frac{\partial A_k^r}{\partial x^l},$$

由于 Chistoffel 符号对指标 k,l 对称，我们有

$$\frac{\partial A_k^r}{\partial x^l}=\frac{\partial A_l^r}{\partial x^k}.$$

现在对固定的 r 知道，由定理 5.3.6 的特殊情形（即 $f(x,t)$ 与 t 无关），方程

$$\frac{\partial f^r}{\partial x^k}=A_k^r(x)$$

有解 $f^r(x)$，作坐标变换

$$\tilde{x}^r=f^r(x),$$

经计算对坐标 $\tilde{x}$ 的 Chistoffel 符号

$$\widetilde{\left\{\begin{matrix} i \\ kl \end{matrix}\right\}}=\left\{\begin{matrix} r \\ p\ \ q \end{matrix}\right\}\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial\tilde{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial\tilde{x}^l}-\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^l}\left(\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial x^r}{\partial\tilde{x}^k}$$

$$=\overset{-1}{A}{}_s^r\frac{\partial A_p^s}{\partial x^q}A_r^i\overset{-1}{A}{}_k^p\overset{-1}{A}{}_l^q-\frac{\partial A_r^i}{\partial x^s}\overset{-1}{A}{}_l^s\overset{-1}{A}{}_k^r=0,$$

此即

$$\frac{\partial\tilde{g}_{kj}}{\partial\tilde{x}^l}+\frac{\partial\tilde{g}_{lj}}{\partial\tilde{x}^k}-\frac{\partial\tilde{g}_{kl}}{\partial\tilde{x}^j}=0,$$

由此可推知 $\frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial \tilde{x}^i} = 0$，故 $\tilde{g}_{kl}$ 为常数． 定理证毕．

定理 5.3.9 设 V 是 R^m 的开集，g_{jk} 是 V 中对称、非异、可微分的二阶逆变张量，若由 g_{jk} 定义的 Weyl 张量

$$C^i{}_{jkl} = 0,$$

则任一点 $x_0 \in V$，必有邻域 U 及有坐标变换 $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$，使得对新的坐标

$$\tilde{g}_{lk} = e^{-2\sigma}\eta_{jk},$$

其中 η_{jk} 为常数。

证 令 $\overset{(1)}{g}_{jk} = e^{2\sigma} g_{jk}$，我们由 § 1.3 已知 $\overset{(1)}{g}_{jk}$ 定义的 Weyl 张量 $\overset{(1)}{C}{}^i_{jkl}$，有

$$\overset{(1)}{C}{}^i_{jkl} = C^i_{jkl}, \tag{5.3.12}$$

并且由(1.3.24)与(1.3.25)消去 $g^{il}\sigma_{i;l}$，有

$$\begin{aligned}\sigma_{j;k} = \sigma_j\sigma_k &- \frac{1}{m-2}(\overset{(1)}{R}_{jk} - R_{jk}) \\ &+ \frac{1}{2(m-1)(m-2)}(\overset{(1)}{g}_{jk}\overset{(1)}{R} - g_{jk}R) \\ &- \frac{1}{2} g_{jk} g^{rs}\sigma_r\sigma_s.\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

我们选取 σ，使得适合下面的微分方程

$$\begin{aligned}\sigma_{j;k} = \sigma_j\sigma_k &- \frac{1}{m-2}\left(\frac{R}{2(m-1)} g_{jk} - R_{jk}\right) \\ &- \frac{1}{2} g_{jk} g^{rs}\sigma_r\sigma_s.\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

如果这样的 σ 存在，由上两式相减可得出

$$\overset{(1)}{R}_{jk} = \frac{\overset{(1)}{R}}{2(m-1)}\overset{(1)}{g}_{jk}.$$

由此得到

$$\overset{(1)}{C}{}^i_{jkl} = \overset{(1)}{R}{}^i_{jkl} + \frac{1}{m-2}(\delta^i_l \overset{(1)}{R}_{jk} - \delta^i_l \overset{(1)}{R}_{jk}$$

$$+ \overset{(1)}{R}{}^i_l \overset{(1)}{g}_{jk} - \overset{(1)}{R}{}^i_k \overset{(1)}{g}_{jl}) + \frac{\overset{(1)}{R}}{(m-1)(m-2)}$$

$$\times (\delta^i_l \overset{(1)}{g}_{jk} - \delta^i_k \overset{(1)}{g}_{jl}) = \overset{(1)}{R}{}^i_{jkl}.$$

据假设 $\overset{(1)}{C}{}^i_{jkl} = 0$，故有 $\overset{(1)}{R}{}^i_{jkl} = 0$，由上面的定理知道，可作适当的坐标变换使 $\widetilde{\overset{(1)}{g}}_{jk}$ 为常数因而 $\tilde{g}_{jk} = e^{-2\sigma} \widetilde{\overset{(1)}{g}}_{jk}$，定理便证明了. 为了能证明存在 σ 适合(5.3.14)，首先证明存在 σ_j，使其适合(5.3.14)，据 Frobenius 定理知，此 σ_j 的一阶方程的积分条件为

$$\frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^l \partial x^k} = \frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^k \partial x^l}.$$

由于

$$\sigma_{j;kl} = \frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial x^l}\left\{ {r \atop kj} \right\} - \sigma_r \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {r \atop kj} \right\}$$

$$- \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x^k} - \left\{ {s \atop r\ k} \right\} \sigma_s \right) \left\{ {r \atop jl} \right\} - \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x^r} - \left\{ {s \atop jr} \right\} \sigma_s \right) \left\{ {r \atop jl} \right\}.$$

故可知积分条件即

$$\sigma_{j;kl} - \sigma_{j;lk} = \left(\frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^l \partial x^k} \right) + R^r{}_{jkl} \sigma_r$$

$$= \sigma_r R^r{}_{jkl}. \qquad (5.3.15)$$

由(5.3.14)知道 $\sigma_{j;k} = \sigma_{k;j}$

$$\sigma_{j;kl} = \sigma_{j;l}\sigma_k + \sigma_j \sigma_{k;l}$$

$$- \frac{1}{m-2}\left(\frac{R_{;l}}{2(m-1)} g_{jk} - R_{jk;l} \right) - g_{jk} g^{rs} \sigma_r \sigma_{s;l}.$$

因此，

$$C_{j;kl}=\left[\sigma_j\sigma_l-\frac{1}{m-2}\left(\frac{R}{2(m-1)}g_{jl}-R_{jl}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}g_{jl}g^{rs}\sigma_r\sigma_s\right]\sigma_k+\sigma_j\sigma_{k;l}-\frac{1}{m-2}$$

$$\times\left(\frac{R_{;l}}{2(m-1)}g_{jk}-R_{jk;l}\right)-g_{jk}g^{rs}$$

$$\times\left[\sigma_s\sigma_l-\frac{1}{m-2}\left(\frac{R}{2(m-1)}g_{sl}-R_{sl}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}g_{sl}g^{pq}\sigma_p\sigma_q\right]\sigma_r.$$

我们要证明当 σ_j 适合(5.3.14)及 $C^i{}_{jkl}=0$，则(5.3.15)必定成立。

由 $C^i_{jkl}=0$ 可知

$$R^i{}_{jkl}=\frac{1}{m-2}(\delta^i{}_kR_{jl}-\delta^i_lR_{jk}-R^i{}_kg_{jl}-R^i{}_lg_{jk})$$

$$+\frac{R}{(m-1)(m-2)}(\delta^i{}_lg_{jk}-\delta^i{}_kg_{jl}). \qquad (5.3.16)$$

由上式的协变微分 $R^i{}_{jkl;i}$，并应用 Bianchi 恒等式，知

$$\frac{1}{m-2}(R_{jk;l}-R_{jl;k})-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}$$

$$\times(g_{jk}R_{;l}-g_{jl}R_{;k})=0. \qquad (5.3.17)$$

由(5.3.14)可知

$$\sigma_{j;kl}=\sigma_{j;l}\sigma_k+\sigma_j\sigma_{k;l}-\frac{1}{m-2}\left(\frac{R_{;l}}{2(m-1)}g_{jk}-R_{jk;l}\right)$$

$$-g_{jk}g^{rs}\sigma_r\sigma_{s;l}=\sigma_j\sigma_{k;l}+\sigma_j\sigma_k\sigma_l-\frac{1}{2}(g_{jl}\sigma_k+g_{jk}\sigma_l)$$

$$\times g^{rs}\sigma_r\sigma_s + \frac{R}{2(m-2)(m-1)} g_{jl}\sigma_k$$

$$+ \frac{R}{2(m-1)(m-2)} (g_{jl}\sigma_k + g_{jk}\sigma_l) - \frac{1}{m-2} R_{jl}\sigma_k$$

$$- \frac{1}{m-2} g_{jk}R^r_l\sigma_r - \frac{1}{2(m-1)(m-2)} g_{jk}R_{;l}$$

$$+ \frac{1}{m-2} R_{jk;l}.$$

应用(5.3.16)及(5.3.17)可知

$$\sigma_{j;kl} - \sigma_{j;lk} = \frac{1}{m-2}\Big[(R_{jl}\sigma_k - R_{jk}\sigma_l) + (g_{jl}R^r{}_k\sigma_r$$

$$- g_{jk}R^r_l\sigma_r) + \frac{R}{2(m-1)(m-2)} (g_{jl}\sigma_k - g_{jk}\sigma_l)\Big]$$

$$+ \Big[\frac{1}{m-2}(R_{jk;l} - R_{jl;k}) + \frac{1}{2(m-2)(m-1)}$$

$$\times (g_{jk}R_{;l} - g_{jl}R_{;k})\Big] = R^i{}_{jkl}\sigma_i.$$

此即积分条件成立，故 σ_k 有解．又由(5.3.14)可知 $\sigma_{j;k} = \sigma_{k;j}$，此即

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x^k} = \frac{\partial \sigma_k}{\partial x^j},$$

故存在 σ 使 $\sigma_j = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^k}$，定理证毕．

§5.4 Sard 定 理

R^m 的一子集 A，称为**测度为 0**（以 $\mathrm{mes}A = 0$ 表之），若对 $\forall \varepsilon > 0$，有一串球 $B_\lambda = \{x \in R^m \,\big|\, |x - x_\lambda| < \delta_\lambda\}$ 或者方

体 Q_λ，$\lambda=1,2,\cdots$，使

$$\text{(i)}\quad A\subset\sum_{\lambda=1}^{\infty}B_\lambda,$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{\lambda=1}^{\infty}\operatorname{vol}B_\lambda<\varepsilon,$$

其中

$$B_\lambda=[\pi^{m/2}/\Gamma(1+\tfrac{m}{2})](\delta_\lambda)^m.$$

由定义可知:

(1) 如果 $A\subset\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$，而 $\operatorname{mes}A_\lambda=0$，则 $\operatorname{mes}A=0$.

实际上，以 $B_{\lambda,\mu}$ 球覆盖 $A_\lambda(\mu=1,2,\cdots)$，使得

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\operatorname{vol}B_{\lambda,\mu}<\frac{\varepsilon}{2^\lambda},$$

则显然所有超球 $B_{\lambda,\mu}$ 覆盖 A，且体积之和小于 ε.

(2) 如果 φ 是把 A 的邻域映入 R^m 的微分映照，且 $\operatorname{mes}A=0$，则 $\operatorname{mes}\varphi(A)=0$. 实际上，$A$ 可以用可数多个紧子集覆盖，而只要证明包含于每一紧子集的 A 的子集的 φ 的像是测度为 0 便可以了. 因此不妨假定 A 本身包含在一紧子集中，于是有一正数 μ，使

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\mu|x-y|,$$

对任意 x,y 属于包含 A 的紧集. 任与 $\varepsilon>0$，以球 B_λ 盖过 A，使 $\sum\operatorname{vol}B_\lambda<\dfrac{\varepsilon}{\mu^m}$，则由此之不等式可知 $\varphi(B_\lambda)$ 在一个以 μ 倍 B_λ 的半径的球 C_λ 之内，因此这些球的体积之和小于 ε.

一微分流形 $\mathfrak{M}$ 的子集 A 称为**测度为 0**（以 $\operatorname{mes}A=0$ 表之），若 $A=\bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$，且每一 A_λ 在一坐标邻域 U_λ 之中，对于

坐标系 φ_λ 有 $\varphi_\lambda(A_\lambda)$ 是测度为 0. 根据 (1) 与 (2) 可知，测度为 0 与局部坐标的选取无关，此外，如 $\varphi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 是微分映照，则当 $A\subset\mathfrak{M}$ 是测度为 0 时，$\varphi(A)$ 是测度为 0 的点集.

引理 5.4.1 如 A 是微分流形$\mathfrak{M}$的子集，若每一点 $p\in\mathfrak{M}$，有一邻域 $U(p)$，使 $\text{mes}(U(p)\cap A)=0$，则 $\text{mes}A=0$.

实际上，不妨假定 $U(p)$是坐标邻域，由于$\mathfrak{M}$有可数基，我们便能由 A 的覆盖 $\{U(p)\}$ 选取加细可数覆盖 $\{U_\lambda\}$，使得 $A=\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}A\cap U_\lambda$，而有 $\text{mes}(A\cap U_\lambda)=0$.

若微分映照 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 的函数矩阵在点 $p\in\mathfrak{M}$ 之秩 $<n=\dim\mathfrak{N}$，则称为**非常点**，而其它的点称之为**常点**；如 $q\in\mathfrak{N}$，使$f^{-1}(q)$ 最少有一个非常点，则 q 称为**非常值**，其它的点称为常值. 注意 q 是常值时$f^{-1}(q)$是 $\mathfrak{M}$ 的$m-n$ 维子流形.

引理 5.4.2 设 V 是 R^m 的开集，$f:V\to R^n$ 是微分映照，则当$n>m$时，$f(V)$ 的测度为 0.

证 设映照函数为

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m);\alpha=1,\cdots,n.$$

把V看作 R^n 的子集 $V\times 0,0\in R^{n-m}$. 而作微分映照 $g:V\times 0\to R^n$ 如下

$$y^\alpha=g^\alpha(x^1,\cdots,x^n)=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m).$$

$V\times 0$ 在 R^n 中测度为 0，因此 $g(V\times 0)=f(V)$ 在 R^n 中测度为 0，定理证毕.

定理 5.4.3 (Sard 定理) 设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 是微分流形，$f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$是微分映照，则 f 的非常点的集合 A 的像集 $f(A)$ 在 $\mathfrak{N}$ 中测度为 0.

设 $p\in\mathfrak{M}$，使$q=f(p)$ 取一坐标邻域 U，$f:U\to V\subset\mathfrak{N}$ 的一个坐标邻域时，f 在U的非常点集合 $A\cap U$ 的像集 $f(A\cap U)$ 之测度为 0 就够了. 此即要证

定理 5.4.4 设 V 是 R^m 的开集，微分映照 $f:V\to R^n$ 的非常点集合 A 的像点 $f(A)$ 在 R^n 中测度为 0.

根据引理 5.4.2，只须证明 $m\geqslant n$ 的情形，先证明 $m=n$.

命题 5.4.5 若 V 是 R^m 的开集，$f:V\to R^m$ 是微分映照，若 A 是 f 的非常点的集合，则 $f(A)$ 测度为0.

证 设映照的坐标表示为

$$y^i=f^i(x),\quad x\in V.$$

若 $a\in A$，则据假设 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=a}$ 之秩小于 m. 我们只须证明有一以 a 为中心的闭方体 $Q\subset V$，使得 $f(Q\cap A)$ 测度为 0.

若 $x,b\in Q$，由 Taylor 展开式可知

$$f(x)-f(b)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=b}(x-b)+r(x,b),\tag{5.4.1}$$

其中 $x-b=(x^1-b^1,\cdots,x^m-b^m)'$，看作是 $m\times 1$ 矩阵，$r=(r^1,\cdots,r^m)'$. 由于 Q 是紧的，存在正数 $\lambda(|x-b|)$ 使

$$|r(x,b)|\leqslant\lambda(|x-b|)\cdot|x-b|,\tag{5.4.2}$$

其中 $\lambda(|x-b|)$，当 $|x-b|\to 0$ 时一致趋于 0.

任与 $\varepsilon>0$，令 Q_ε 为以 ε 为边长的一个方体. 若 Q_ε 包含 A 的点 b，则由于方体的体积与平移及正交变换无关，不妨假定 $b=0$，并且可作 x 的正交坐标变换与 y 的正交坐标变换使得

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{m-1} & \\ & & & 0\end{pmatrix}.\tag{5.4.3}$$

由(5.4.1)可知

$$f^m(x)=r^m(x,0).$$

当 $x\in Q_\varepsilon$，由 (5.4.2)可知，$f^m(x)$ 在两超平面

$$y^m = 2\lambda(\varepsilon)\varepsilon \text{ 与 } y^m = -2\lambda(\varepsilon)\varepsilon$$

之间，而由 (5.4.1) 知，其它的 $f^\alpha(x)(\alpha = 1,\cdots,m-1)$ 在超平面

$$y^\alpha = M\varepsilon \text{ 与 } y^\alpha = -M\varepsilon,(\alpha = 1,\cdots,m-1)$$

之间，其中 M 为一正常数，因此 $f(x)$ 在一个长方体有一边长为 $4\lambda(\varepsilon)\varepsilon$，其他边长为 $2M\varepsilon$ 之中，故 $f(Q_\varepsilon)$ 的测度 $\leqslant 2^{m+1}M^{m-1}\cdot\lambda(\varepsilon)\varepsilon^m$. 设 Q 的边长为 l，把 Q 分为 $(l/\varepsilon)^m$ 个小方体（取 ε 使 l/ε 为整数），对每个小方体 Q_i，当 $Q_i\cap A \neq \phi$ 时，

$$\text{mes}f(Q_i) \leqslant 2^{m+1}M^{m-1}\varepsilon^m\lambda(\varepsilon).$$

因此

$$\text{mes}f(A\cap Q) \leqslant \sum_{\substack{i\\(A\cap Q_i\neq\phi)}}\text{mes}f(A\cap Q_i)$$

$$\leqslant \left(\frac{l}{\varepsilon}\right)^m \cdot 2^{m+1}M^{m-1}\varepsilon^m\lambda(\varepsilon) = l^m 2^{m+1}M^{m-1}\lambda(\varepsilon) \to 0;$$

当 $\varepsilon \to 0$，这证明 $\text{mes}f(A\cap Q) = 0$. 命题证毕.

命题 5.4.6 令 V 为 R^m 的开集，$f: V \to R^1$ 是微分映照，A 是非常点的集合，则 $\text{mes}f(A) = 0$.

证 令 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 是一组非负整数，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$;

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}. \tag{5.4.4}$$

定义

$$A_k = \{a\in V\,|\,D^\alpha f(a) = 0,\ \text{当 } 0<|\alpha|\leqslant k\},$$

显然 $A_{k+1}\subset A_k, k = 1,2,\cdots,m-1$. 由于

$$A = A_1 = \sum_{k=1}^{m-1}(A_k - A_{k+1}) + A_m. \tag{5.4.5}$$

当 $a\in A_m$，命 Q 为包含 a 的方体，我们有

$$|f(x)-f(a)|\leqslant M(\max\{|x^1-a^1|,\cdots,|x^m-a^m|\})^{m+1},$$

这表示当Q的方体的边长为ε时，像点集合在R^1的测度$\leqslant M\varepsilon^{m+1}$. 如同命题 5.4.5 一样可证，把$Q$分为$(l/\varepsilon)^m$个小方体，则$f(A_m)$的测度$\leqslant l^m M\varepsilon$，$\varepsilon$可以任意小，故$\operatorname{mes}f(A_m)=0$. 当$m=1$，$A=A_1=A_m$，命题已证明. 用归纳法假设此命题对于映$R^{m-1}$的开集入$R^1$的微分映照成立.

现在根据分解，只须证$f(B_k)$的测度为 0，$B_k=A_k-A_{k+1}$，$1\leqslant k<m$. 只须证任一点$a\in B_k$有一邻域U，使$f(B_k\cap U)$的测度为 0.

由于$a\bar{\in}A_{k+1}$，必有一$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$使得

$$D^\alpha f(a)\neq 0,\ |\alpha|=k+1.$$

因$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$不全为 0，不妨设$\alpha_1\neq 0$，令

$$\beta=(\alpha_1-1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m),$$

而令

$$h=D^\beta f.$$

作映照

$$y^1=h,y^j=x^j\quad(j=2,\cdots,m),$$

此是把a的一邻域U一一地映为R^m的一个立方体Q的微分映照，设此映照为φ，于是

$$\varphi(\{x\in U|h(x)=0\})=\{y\in Q|y^1=0\}\overset{\text{def}}{=}H$$

据假设$\varphi(B_k\cap U)\subset H$. 令

$$V_1=\{(y^2,\cdots,y^m)\in R^{m-1}|(0,y^2,\cdots,y^m)\in H\}.$$

作

$$g(y^2,\cdots,y^m)=F(0,y^2,\cdots,y^m),$$

其中$F=f\circ\varphi^{-1}$. 若命$S=\varphi(B_k\cap U)$，则有$F(S)\subset g(A_g)$，其中A_g是g的非常点集合，因为F在S的点是适合$y^1=0$时

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)^{\alpha_m}F(y^1,\cdots,y^m)=0,\ 0<|\alpha|\leqslant k$$

的 y 点，而 A_g 的点只要求适合其中一部分方程

$$\frac{\partial g(y^2,\cdots,y^m)}{\partial y^j}=0, j=2,\cdots,m.$$

根据归纳法假设，$g(A_g)$ 的测度为 0，因而 $F(S)=f(U\cap B_k)$ 的测度为 0。命题证毕。

命题 5.4.7 设 V 是 R^m 的开集，微分映照

$$y^\alpha=f^\alpha(x),\ \alpha=1,\cdots,n,$$

把 V 映入 R^n，则集合 $B=\left\{x\in V\left|\frac{\partial y}{\partial x}=0\right.\right\}$ 的像点 $f(B)$ 的测度为 0。

证 由于 $B\subset B_1=\left\{x\in V\left|\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=0,\cdots,\frac{\partial f^1}{\partial x^m}=0\right.\right\}$，而

$$f(B)\subset f^1(B_1)\times R^{n-1},$$

据命题 5.4.6，$f^1(B_1)$ 在 R^1 的测度为 0，因而 $f^1(B_1)\times R^{n-1}$ 的测度为 0。证毕。

现在证明定理 5.4.4。只须证 $m>n$。

令

$$A=E_0+E_1+\cdots+E_{n-1},$$

其中 $E_k(0\leqslant k<n)$ 是映照 f 的函数矩阵 $\partial f/\partial x$ 之秩为 k 的 V 中的点集。我们要证明每一 $f(E_k)$ 的测度为 0，这只须证任一点 $a\in E_k$ 有一邻域 U 使 $f(U\cap E_k)$ 的测度为 0。据命题 5.4.7 已知，$f(E_0)$ 的测度为 0，我们只须证 $k\geqslant 1$ 情形。

我们不妨假定 $a=0, f(a)=0$，

$$\det\left[\frac{\partial(f^1,\cdots,f^k)}{\partial(x^1,\cdots,x^k)}\right]_{x=a}\neq 0.$$

作变换

$$u^1=f^1(x),\cdots,u^k=f^k(x),u^{k+1}=x^{k+1},\cdots,u^m=x^m,$$

据隐函数定理知此变换把 a 的一个邻域 U 微分同胚为 R^m 的以原点为中心的边长为 2ε 的方体 $Q_\varepsilon^m = Q_\varepsilon^k \times Q_\varepsilon^{m-k}$，而$(f^1(x), \cdots, f^n(x)) = (u^1, \cdots, u^k, F^{k+1}(u), \cdots, F^n(u))$。我们只须证明 $F(u) = (u^1, \cdots, u^k, F^{k+1}(u), \cdots, F^n(u)): Q_\varepsilon^m \to R^n$ 的函数矩阵 $\partial F/\partial u$ 之秩为 k 的点集 $\tilde{E}_k$ 的像集 $F(\tilde{E}_k)$ 测度为 0。映照 F 的坐标表示为

$$y^1 = u^1, \cdots, y^k = u^k, y^{k+1} = F^{k+1}(u), \cdots, y^m = F^n(u). \tag{5.4.5$'$}$$

令 $u = (u_1, u_2), u_1 = (u^1, \cdots, u^k), u_2 = (u^{k+1}, \cdots, u^m)$；由于

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} I^{(k)} & 0 \\ * & \dfrac{\partial(F^{k+1}, \cdots, F^n)}{\partial(u^{k+1}, \cdots, u^m)} \end{pmatrix}$$

之秩为 k，必须 $u = (u_1, u_2)$ 适合

$$\frac{\partial(F^{k+1}, \cdots, F^n)}{\partial(u^{k+1}, \cdots, u^m)} = 0. \tag{5.4.6}$$

当 $u_1 \in Q_\varepsilon^k$ 固定时，令 $F_{u_1}: Q_\varepsilon^{m-k} \to R^{n-k}$ 定义为

$$y^{k+1} = F^{k+1}(u_1, u_2), \cdots, y^n = F^n(u_1, u_2).$$

此映照的函数矩阵即 $\dfrac{\partial(F^{k+1}, \cdots, F^n)}{\partial(u^{k+1}, \cdots, u^m)}$，据命题 5.4.7 可知，$Q_\varepsilon^{m-k}$ 中适合 (5.4.6) 的点集 $E_k(u_1)$ 的像集 $F_{u_1}(E_k(u_1))$ 在 R^{n-k} 中的测度为 0，但由 (5.4.5) 可知

$$\operatorname{mes} F(\tilde{E}_k) = \int_{Q_\varepsilon^k} dy^1 \cdots dy^k \int_{F_{u_1}(E_k(u_1))} dy^{k+1} \cdots dy^n = 0,$$

定理证毕。

Sard[9] 定理最初由 R^m 的开集 V 到 R^n 的形式是 Brown[2] 给出，后来由 Morse[6] 证明一般的只要 C^k 微分流形与 C^k 微分映照，k 适合 $k-1 \geqslant \max\{m-n, 0\}$ 便成立。

§5.5 Whitney 定理

设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 是局部紧 Haussdorff 空间，连续映照 $f:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 称为**逆紧**(proper)，若对 $\mathfrak{N}$ 的任一紧子集 K，$f^{-1}(K)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的紧子集。

一逆紧的映照把闭集映为闭集，因为若 S 是 $\mathfrak{M}$ 的闭集，点串 $y_k\in f(S)$，$k=1,2,\cdots$ 有聚点 $y_k\to y_0\in\mathfrak{N}$，则 $\{y_0,y_1,y_2,\cdots\}$ 是紧的，故 $f^{-1}(\{y_0,y_1,y_2,\cdots\})$ 是紧。令 $x_k\in S$ 使 $f(x_k)=y_k$，$(k>0)$，则 x_k 有聚点 $x_k\to x_0\in S$，于是 $f(x_k)\to f(x_0)=y_0$，由此可知，$y_0\in f(S)$。

设 $f:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ 是子流形，称为闭的，如 $f:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ 是逆紧的。此时由 f 诱导出 $f(\mathfrak{N})$ 的拓扑是相对于 $\mathfrak{M}$ 的拓扑。

现考虑所有微分映照 $f:\mathfrak{M}\to R^n$ 所组成的空间 $C(\mathfrak{M},n)$，我们在此空间定义一拓扑如下：令 $\mathfrak{U}=\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一组图册，使得 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的局部有限开覆盖，并且每一 U_λ 的闭包是紧的。令 K_λ 是 U_λ 的紧子集适合 $\bigcup\limits_{\lambda\in\mathscr{I}}K_\lambda=\mathfrak{M}$，据引理 5.1.2 可知，这样的 $\{K_\lambda\}$ 是存在的。令 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 是一组非负整数，定义

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_m \tag{5.5.1}$$

及在 U_λ 的坐标系 $x=\varphi_\lambda$ 中定义

$$D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}. \tag{5.5.2}$$

给与一族正实数 $\varepsilon=\{\varepsilon_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ 及一族正整数 $\mathfrak{m}=\{m_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$，对一固定的 $f_0\in C(\mathfrak{M},n)$，令

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathfrak{U},\mathfrak{m},\varepsilon,f_0)$$

表示集合

$$\mathfrak{B}=\{f\in C(\mathfrak{M},n)\big|\,|D^{\alpha}(f-f_0)(p)|<\varepsilon_\lambda,\text{当 } p\in K_\lambda$$
$$|\alpha|\leqslant m_\lambda,\lambda\in\mathscr{I}\}. \tag{5.5.3}$$

我们定义 $C(\mathfrak{M},n)$上的拓扑为取定 $\mathfrak{U}$ 时，所有这些 $\mathfrak{B}$，当 $\mathfrak{M}$，ε 过所有可能的族，成为 f_0 的邻域的基本系。

现要证明如此定义的拓扑与$\mathfrak{A}$的选取无关，如 $\mathfrak{B}=\{(U'_\mu,\varphi'_\mu)\}_{\mu\in\mathscr{I}'}$ 是另一组图册，$\{U'_\mu\}$ 是局部有限，$\bar{U}'_\mu$ 是紧，且K'_μ 是紧子集，$K'_\mu\subset U'_\mu$，且适合$\sum K'_\mu=\mathfrak{M}$. 对给定的(5.5.3)的一个 f_0 的邻域 $\mathfrak{B}$，由于每一个 K'_μ 最多与有限个 K_λ 有交，我们取

$$\varepsilon'_\mu\leqslant\varepsilon_\lambda,\ m'_\mu\geqslant m_\lambda, \tag{5.5.4}$$

对每个 $\lambda\in\mathscr{I}$，且 $K_\lambda\cap K'_\mu\neq\phi$，于是取 $\varepsilon'=\{\varepsilon'_\mu\}_{\mu\in\mathscr{I}'}$，$\mathrm{m}'=\{m'_\mu\}_{\mu\in\mathscr{I}'}$，而作

$$\mathfrak{B}'=\{f\in C(\mathfrak{M},n)\big|\,|D^{\alpha}(f-f_0)(p)|<\varepsilon'_\mu,\text{当}$$
$$p\in K'_\mu,|\alpha|\leqslant m_{\mu'},\mu\in\mathscr{I}'\},$$

则对任一 $f\in\mathfrak{B}'$，$p\in K_\lambda$ 时据(5.5.4)

$$|D^{\alpha}(f-f_0)(p)|<\varepsilon'_\mu\leqslant\varepsilon_\lambda,$$

当 $p\in K_\lambda\cap K'_\mu$，$|\alpha|\leqslant m'_\mu$，故有

$$|D^{\alpha}(f-f_0)(p)|<\varepsilon_\lambda,$$

当 $p\in K_\lambda$，$|\alpha|\leqslant m_\lambda$，此即 $f\in\mathfrak{B}$，亦表示 $\mathfrak{B}'\subset\mathfrak{B}$. 同理可证对任取的 $\mathfrak{B}'$，可找到 $\mathfrak{B}$，使 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}'$. 此示 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 所定义的 $C(\mathfrak{M},n)$ 的拓扑是彼此等价的，因此这样在 $C(\mathfrak{M},n)$ 所定义的拓扑与 $\mathfrak{A}$ 的选取无关.

命题 5.5.1 所有浸入 $f:\mathfrak{M}\to R^n$ 的集合是$C(\mathfrak{M},n)$的开集.

证 首先证明，如 $A_0(x)$ 是 R^m 中一开集U中的 $n\times m$ 矩阵，其秩为 m，并且它的元素是U中可微分函数，K是U中的紧集，则存在正数 ε，使得任与U中可微分 $n\times m$ 矩阵 $A(x)$，当 $A(x)-A_0(x)$ 之每个元素在K的绝对值小于 ε 时，

$A(x)$在K上的秩仍为m.实际上,必有正数δ,使对任意$x\in K$

$$\det(\overline{A}_0'(x)A_0(x))\geqslant\delta,$$

其中A'表示A的转置. 由于

$$\overline{A}'A=\overline{A}_0'A_0+\overline{A}_0'(A-A_0)+(\overline{A-A_0})'A,$$

故有,

$$\det\overline{A}'A=\det(\overline{A}_0'A_0)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}^{(0)}(x))$$

$$\times M_{ij}(x)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\overline{(a_{ij}(x)-a_{ij}^{(0)}(x))}\,\overline{M_{ij}(x)},$$

其中 $A=(a_{ij}),A_0=(a_{ij}^{(0)}),M_{ij}(x)$ 是U中可微分函数, 必有正数 Λ, 使

$$|M_{ij}(x)|\leqslant\Lambda,\ \text{当}\ x\in K.$$

于是有,当 $x\in K$,

$\det\overline{A}'A\geqslant\delta-2\varepsilon mn\Lambda>0$, 当 $\varepsilon<\delta/2mn\Lambda$ 时, 此示 $A(x)$ 在K之秩为 m.

现任与浸入$f_0:\mathfrak{M}\to R^n$. 取图$\mathfrak{A}=\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{J}}$, 定义$C(\mathfrak{M},n)$的拓扑. 任一$K_\lambda$, 据假设函数矩阵

$$\frac{\partial f_0}{\partial x},\qquad \varphi_\lambda(p)=x,$$

在 U_λ 之秩为 m, 因此必有 ε_λ, 使得 $f\in C(\mathfrak{M},n)$, 并当$p=\varphi_\lambda^{-1}(x)\in K_\lambda$,满足

$$|(D^\alpha f-D^\alpha f_0)(p)|<\varepsilon_\lambda,\ |\alpha|\leqslant 1$$

时,函数矩阵$\partial f/\partial x$之秩为m,即f是浸入. 取$m_\lambda=1$, 由此可知, 当 $f\in\mathfrak{B}(\mathfrak{A},\varepsilon,\mathrm{m},f_0)$时必是浸入,命题证毕.

我们固定一个具有上述性质的图册$\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{J}}$, 如$L$是$\mathfrak{M}$中一紧子集, $f\in C(\mathfrak{M},n)$. 令

$$\|f\|_{r,L}=\sum_{\lambda\in\mathcal{J}}\sum_{|\alpha|\leqslant r}\sup_{p\in L\cap K_\lambda}|D^\alpha f(p)|. \qquad (5.5.5)$$

引理 5.5.2 设K是$\mathfrak{M}$中的紧集，L是K的紧邻域，则对任一浸入 $f:\mathfrak{M}\to R^n$ 在L是内射，有一 $\delta>0$，使得对所有 $g\in C(\mathfrak{M},n)$ 适合

$$\|f-g\|_{1,L}<\delta$$

时映照 $g|K$ 是内射.

证 任一点$p\in K$，可取一邻域U使$\bar{U}$是紧的、包含于L、且包含于某一坐标邻域之中.设φ是坐标系，取 $\varphi(\bar{U})$ 充分小使任两点 $a,b\in\bar{U}$ 有

$$|f(a)-f(b)|\geqslant\varepsilon|a-b|,$$

(其中定义$|a-b|=|\varphi(a)-\varphi(b)|$)这是可以做到的，因为不妨假定$U$是欧氏空间的邻域，由 Taylor 展式可知

$$f(a)-f(b)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_{x=\xi}(a-b),$$

于是

$$|f(a)-f(b)|^2=(a-b)'\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=\xi}(a-b).$$

由于$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=\xi}$之秩为 $m(\leqslant n)$，故有正数ε使

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=\xi}\geqslant\varepsilon^2I,$$

这表示$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=\xi}-\varepsilon^2I$是正定的.

对任意$a,b\in\bar{U}$，若$g\in C(\mathfrak{M},n)$使$\|f-g\|_{1,\bar{U}}$充分小时，则由$h=f-g$的 Taylor 展式可得

$$|h(a)-h(b)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon|a-b|,\ \text{对所有}\ a,b\in\bar{U}.$$

由此可知

$$|g(a)-g(b)|\geqslant|f(a)-f(b)|-$$

$$|h(a)-h(b)| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon|a-b|, \qquad (5.5.6)$$

对所有 $a,b \in \bar{U}$，故 $g|\bar{U}$ 是内射.

由于K是紧的，我们可取有限个图 (U_1,φ_1)，$\cdots$，(U_N, φ_N)使 $K \subset \bigcup_{\lambda=1}^{N} U_\lambda \subset L$. 于是 $\|f-g\|_{1,L}$ 充分小时，$g|U_\lambda$ 是内射. 此即(5.5.6)在 $\bar{U}_\lambda$ 成立.

令Δ表$K \times K$的对角线,即所有(a,a)点，$a \in K$. 令W表对角线的如此的邻域,任一$(a,a) \in \Delta$,a必属于某一个U_λ.取ε_1为充分小正数,而令

$$U_{(a,a)} = \{(b,c) \in U_\lambda \times U_\lambda \,\big|\, |b-a| + |c-a| < \varepsilon_1\},$$

而 $W = \bigcup_{(a,a)\in\Delta} U_{(a,a)}$. 由此可知，当 $(c,b) \in W-\Delta$，据(5.5.6),$g(c) \neq g(b)$.

由于$K \times K - W$仍是紧的,有正数θ使得$|f(a)-f(b)| \geqslant \theta$,当$(a,b) \in K \times K - W$. 如果$\|f-g\|_{0,K} < \frac{\theta}{2}$，则当$(a,b) \in K \times K - W$时，

$$|g(a)-g(b)| \geqslant |f(a)-f(b)| - |f(a)-g(a)| \\ - |f(b)-g(b)| > 0,$$

即$g(a) \neq g(b)$,在$(a,b) \in K \times K - W$. 综上所述，$g(a) \neq g(b)$当$(a,b) \in K \times K - \Delta$,此即 $a,b \in K$,$a \neq b$ 时 $g(a) \neq g(b)$,这就证明了引理.

引理 5.5.3 设V是R^m中的有界开集,而 $f_0: V \to R^n$ 是微分映照. 若$n \geqslant 2m$，则任与正整数r及正数ε，必有微分映照 $f: V \to R^n$ 使得函数矩阵 $\partial f/\partial x$ 在V之秩为 m，并且$\|f-f_0\|_{r,V} < \varepsilon$.

证 这只须证明当f_0在V中的函数矩阵$\frac{\partial f_0}{\partial x}$中,如子矩阵

$\dfrac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^s)}$ 之秩为 $s(<m)$，则存在微分映照 $f:V\to R^n$ 使得 $\dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^{s+1})}$ 之秩为 $s+1$，并且 $\|f-f_0\|_{r,V}<\varepsilon$.

实际上，令

$$\varphi(x,x^{m+1},\cdots,x^{m+s})=\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^{s+1})}(x^{m+1},\cdots,x^{m+s},-1)',$$

φ 可看作映 $V\times R^s$ 入 R^n 的微分映照。由于 $m+s<2m\leqslant n$，据引理 5.4.2 可知，任与 $\delta>0$，存在 $a\bar{\in}\varphi(V\times R^s)$ 适合 $|a|<\delta$. 作映照

$$f(x)=f_0(x)+x_{s+1}a,$$

则

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^{s+1})}=\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^{s+1})}+(0,a')$$

之秩必为 $s+1$. 如若不然，必有非零的 $1\times(s+1)$ 矩阵 $(x^{m+1},\cdots,x^{m+s},\lambda)$，使

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^{s+1})}(x^{m+1},\cdots,x^{m+s},\lambda)'$$

$$=\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^{s+1})}(x^{m+1},\cdots,x^{m+s},\lambda)'+\lambda a'=0$$

此即

$$\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^s)}(x^{m+1},\cdots,x^{m+s})'$$

$$+\lambda\left(\frac{\partial f_0^1}{\partial x^{s+1}},\cdots,\frac{\partial f_0^m}{\partial x^{s+1}}\right)'=-\lambda a'.$$

λ 必定不为 0，否则有

$$\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^s)}(x^{m+1},\cdots,x^{m+s})'=0,$$

这与假设矛盾，故无妨假定 $\lambda=-1$，但又与 $a \notin \varphi(V\times R^t)$ 矛盾，由于V是有界，$|x_{s+1}|\leqslant M$. 于是有

$$\|f-f_0\|_{r,V}\leqslant(M+1)|a|<(M+1)\delta.$$

命题证毕。

定理 5.5.4 (Whitney 浸入定理) 若$\mathfrak{M}$是m维微分流形，$f_0:\mathfrak{M}\to R^n$ 是微分映照，$n\geqslant 2m$，则任与 $C(\mathfrak{M},n)$ 的邻域 $\mathfrak{B}(\mathfrak{A},\varepsilon,\mathrm{m},f_0)$ 必存在 $f\in\mathfrak{B}$，使得 f 是浸入。

证 取$\mathfrak{M}$的图册 $\mathfrak{A}=\{U_\nu,\varphi_\nu\}$ $\nu=1,2,\cdots$，使得$\{U_\nu\}$是局部有限，$\bar{U}_\nu$ 是紧的，且 $\varphi_\nu(U_\nu)=V_\nu$ 是 R^m 中有界开集，此外有紧集 $K_\nu\subset U_\nu$，使 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}K_\nu=\mathfrak{M}$. 令$\varepsilon_\nu>0$ 及整数 $m_\nu\geqslant 0$. 假定能构造映照 $f_0,f_1,\cdots,f_l:\mathfrak{M}\to R^n$，使得

$(a_l)\ |D^\alpha f_l(x)-D^\alpha f_0(x)|<\varepsilon_\nu$，当 $x\in K_\nu$，$|\alpha|\leqslant m_\nu$;

$(b_l)\ f_l$ 在 $\bigcup\limits_{\nu=0}^{l}K_\nu$ 正则$(K_0=\phi)$;

$(c_l)\ \mathrm{supp}(f_{p+1}-f_p)\subset U_{p+1}$，$p=0,1,\cdots,l-1$.

现作可微分函数 α_l，在$\mathfrak{M}$中 $0\leqslant\alpha_l\leqslant 1$，其支集在 U_{l+1}中，而且在 K_{l+1} 的一个邻域为 1. 据引理 5.5.3，任与 $\delta_l>0$ 及整数 r_l 有微分映照 $h_l:U_{l+1}\to R^n$，使得 h_l 在 U_{l+1} 上正则(即秩为 m)，并且

$$|D^\alpha(h_l-f_l)(x)|<\delta_l,\text{当}|\alpha|\leqslant r_l. \tag{5.5.7}$$

作映照

$$f_{l+1}=\begin{cases}f_l+\alpha_l(h_l-f_l), & \text{在 } U_{l+1},\\ f_l, & \text{在 } \mathfrak{M}-U_{l+1},\end{cases} \tag{5.5.8}$$

则 $f_{l+1}\in C(\mathfrak{M},n)$. 由于在 U_{l+1} 中

$$D^\alpha(f_{l+1}-f_l)=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}D^\beta\alpha_l D^\gamma(h_l-f_l),$$

故当 r_l 取定后，有

$$|D^\alpha(f_{l+1}-f_l)(p)| < M_l\delta_l, |\alpha| \leqslant r_l. \qquad (5.5.9)$$

我们要证明可取 r_l 足够大，δ_l 充分小使 f_{l+1} 适合：

(a_{l+1})．由于 $\overline{U}_{l+1}$ 是紧的，最多有限个 $K_1, \cdots, K_s$ 与 U_{l+1} 有交点．据(a_l)我们有充分小正数 ε 使

$|D^\alpha(f_l-f_0)(p)| < \varepsilon_\mu - \varepsilon$，当$p \in K_\mu$，$|\alpha| \leqslant m_\mu$，$\mu = 1, \cdots, s$．选取 $r_l \geqslant \max\{m_1, \cdots, m_s\}$ 及 $M_l\delta_l < \varepsilon$，于是有

$$|D^\alpha(f_{l+1}-f_0)(p)| \leqslant |D^\alpha(f_{l+1}-f_l)| + |D^\alpha(f_l-f_0)| < \varepsilon_\mu,$$

当 $p \in K_\mu$，$|\alpha| \leqslant m_\mu$，$\mu = 1, \cdots, s$． 至于其它的 $K_\mu(\mu > s)$ 与 U_{l+1} 无交点，因此 $f_{l+1} = f_l$，故 f_{l+1} 适合 (a_{l+1})．

(b_{l+1})．由 (5.5.8) 及 α_l 的性质可知，在 K_{l+1} 中有 $f_{l+1} = h_l$ 是正则的．据(b_l)，f_l 在$K = \sum_{\nu=0}^{l} K_\nu$ 正则，$K \subset \sum_{\mu=1}^{l} U_\mu$，因此有$K$的邻域$U$使 $K \subset U \subset \sum_{\mu=1}^{l} U_\mu$，而 f_l 在 U 正则． 应用引理 5.5.1 于 U，有一 f_l 的邻域 $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'(\{U_\mu \cap U\}_{\mu=1,\cdots,s}, \mathrm{m}', \varepsilon', f_l)$ 使得任一 $g \in \mathfrak{B}'$ 时，g 在 U 是正则． 取 $r_l \geqslant \max\{m_1', \cdots, m_s'\}$，$M_l\delta_l \leqslant \min\{\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_s'\}$．由(5.5.9)可知，$f_{l+1} \in \mathfrak{B}'$，因此 f_{l+1} 在 U 特别是在K 正则，故 f_{l+1} 在$K + K_{l+1} = \sum_{\mu=0}^{l+1} K_\mu$ 正则．

(c_{l+1})．由(5.5.8)知$(f_{l+1}-f_l)=0$，当 $p \in \mathfrak{M} - U_{l+1}$，此即 $\operatorname{supp}(f_{l+1}-f_l) \subset U_{l+1}$．由$(c_l)$可知，$(c_{l+1})$成立．

现设 V 是$\mathfrak{M}$的任一开集其闭包是紧的，则最多$U_1, \cdots, U_s$ 与V 有交点．由(c_l)知在V 中，$f_{s+1} = f_{s+2} = f_{s+3} = \cdots$，故 $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$存在并且$D^\alpha f = \lim\limits_{k\to\infty} D^\alpha f_k$ 对任意之 α．此外 f 在任一$\sum_{\nu=0}^{l} K_\nu$ 正则，因而 f 在$\mathfrak{M}$正则．据(a_l)，当 l 充分大时

$$|D^\alpha(f-f_0)(p)| = |D^\alpha(f_l-f_0)(p)| < \varepsilon_\mu, \text{ 当 } p \in K_\mu,$$

$|\alpha| \leqslant m_\mu$，即 $f \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A}, \mathfrak{m}, \varepsilon, f_0)$. 定理完全得证.

定理 5.5.5 （Whitney 安装定理） 设$\mathfrak{M}$是m维微分流形，任与微分映照 $f_0: \mathfrak{M} \to R^n$，当$n \geqslant 2m+1$，则 f_0 的任一邻域 $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}, \varepsilon, \mathfrak{m}, f_0)$，必有 $f \in \mathfrak{B}$，使得 $f: \mathfrak{M} \to R^n$ 是安装.

证 据定理 5.6.4，不妨假定 f_0 是浸入，取 $\mathfrak{A} = \{(U_\nu, \varphi_\nu)\}_{\nu=1,2,\cdots}$是$\mathfrak{M}$的图册，使得$\{U_\nu\}$是局部有限覆盖，$\overline{U}_\nu$是紧的，$f_0|U_\nu$ 是内射. 此外取紧集 $K_\nu \subset U_\nu$，$\sum K_\nu = \mathfrak{M}$. 令 $\varepsilon_\nu > 0$ 与整数 $m_\nu \geqslant 0$，我们构造一串微分映照 $f_0, f_1, \cdots, f_l: \mathfrak{M} \to R^n$ 适合

(a_l) $f_l|U_\nu$ 对每一 U_ν 是内射；$f_l|\bigcup\limits_{\nu=0}^{l} K_\nu$ 是内射.

(b_l) $\operatorname{supp}(f_{p+1} - f_p) \subset U_{p+1}$；$p = 0, 1, \cdots, l-1$.

(c_l) $|D^\alpha f_l(x) - D^\alpha f_0(x)| < \varepsilon_\nu$；当$x \in K_\nu$，$|\alpha| \leqslant m_\nu$. 设 $f_0, \cdots, f_l$ 已作，现作 f_{l+1} 如下. 作$\mathfrak{M}$上可微函数 α_l，其支集在 U_{l+1} 内，在 K_{l+1} 的邻域 $\alpha_l = 1$. 令

$$V = \{(x, y) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \mid \alpha_l(x) \neq \alpha_l(y)\},$$

则V显然是$\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$的开集，故是一微分流形. 令 $\varphi: V \to R^n$ 如下定义

$$\varphi(x, y) = -\frac{f_l(x) - f_l(y)}{\alpha_l(x) - \alpha_l(y)}.$$

由于 $n \geqslant 2m+1$，$\varphi(V)$ 的测度为 0，由此任与 $\delta > 0$，必有 $a \in R^n$，使 $|a| < \delta$，$a \bar{\in} \varphi(V)$. 令

$$f_{l+1} = f_l + \alpha_l a,$$

如果 $f_{l+1}(x) = f_{l+1}(y)$，则有

$$f_l(x) - f_l(y) = -(\alpha_l(x) - \alpha_l(y))a.$$

由于 $a \bar{\in} \varphi(V)$，必有 $\alpha_l(x) = \alpha_l(y)$，因而 $f_l(x) = f_l(y)$. 由(a_l)可知，$f_{l+1}|U_\nu$ 上是内射，f_{l+1} 在 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{l} K_\nu$ 上亦是内射. 现在如果

$x \in K_{l+1}$, $y \in \bigcup_{\nu=0}^{l} K_\nu$, 使得 $f_{l+1}(x) = f_{l+1}(y)$,则由 $\alpha_l(x) = 1$, $\alpha_l(y) = \alpha_l(x) = 1$,知道 $y \in U_{l+1}$,这是因为 supp $\alpha_l \subset U_{l+1}$. 由于 $f_{l+1}|U_{l+1}$ 上是内射,故必有 $x = y$. 因此证明了 f_{l+1} 适合 (a_{l+1}). 至于适合 (b_{l+1})与(c_{l+1})是显然的. 因此 $f = \lim_{l\to\infty} f_l$ 在 $\mathfrak{M}$ 是内射,且 $f \in \mathfrak{B}(\mathfrak{U}, \varepsilon, \mathfrak{m}, f_0)$. 定理证毕.

定理 5.5.6 如$\mathfrak{M}$是m维微分流形,有一闭浸入于 R^{2n},并有一闭安装于 R^{2n+1}.

证 取 $\{U_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots}$ 是局部有限开覆盖, $\bar{U}_\nu$ 是紧的. 且有紧集 $K_\nu \subset U_\nu$ 与 $\sum K_\nu = \mathfrak{M}$. 取 η_ν 为$\mathfrak{M}$ 上可微分函数, $0 \leqslant \eta_\nu \leqslant 1$,而且 supp $\eta_\nu \subset U_\nu$ 与它在 K_ν 上是恒等于 1. 作

$$f_0(p) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\eta_\nu(p), \ p \in \mathfrak{M},$$

则 $f_0: \mathfrak{M} \to R \subset R^n$. 令 $B_\nu^n = \{x \in R^n \big| |x| < \nu\}$, 则 $f_0^{-1}(B_\nu^n)$ 包含在 $K_1, \cdots, K_\nu$ 之中,故 $f_0^{-1}(B_\nu^n)$是紧的,此即 f_0是逆紧的. 当 $n \geqslant 2m$ 时,定理 5.5.4 存在 $f \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A}, \varepsilon, \mathfrak{m}, f_0)$ 是浸入; 当 $n \geqslant 2m+1$, 据定理 5.5.5 存在这样的 f 是安装. 取所有 $\varepsilon_\nu < 1$, 则有

$$|f(x) - f_0(x)| < 1; \ x \in \mathfrak{M}.$$

由此可知,当 $|f(x)| \leqslant \nu$,必有 $|f_0(x)| \leqslant \nu + 1$, 此即 $f^{-1}(B_\nu^n)$ 包含在 $f_0^{-1}(B_{\nu+1}^n)$ 中,故有 $f^{-1}(B_\nu^n)$ 是紧的,即 f 是逆紧的. 定理证毕.

§5.6 横截 (transversality) 定理

一微分映照 $f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 称为对于 $\mathfrak{N}$ 的子流形 $\mathfrak{W}$ 在 $a \in \mathfrak{M}$ 是横截的 (transversal), 如果或是 $f(a) \bar{\in} \mathfrak{W}$ 或 $f(a) \in \mathfrak{W}$ 时有

$$f_*(\mathfrak{M}_a) + \mathfrak{W}_{f(a)} = \mathfrak{N}_{f(a)},$$

亦即 $f_*(\mathfrak{M}_a)$ 与 $\mathfrak{W}_{f(a)}$ 生成 $\mathfrak{N}_{f(a)}$. f 称为对于 $\mathfrak{W}$ **横截**，若每一点 $a \in \mathfrak{M}$ 是横截于 $\mathfrak{W}$.

若 $\mathfrak{W}$ 的维数是 $n-r$，n 是 $\mathfrak{N}$ 的维数，则 r 称为 $\mathfrak{W}$ 的**补维**(codimension).

注意对 $\forall b \in \mathfrak{W}$，可选一 $\mathfrak{N}$ 的图 (U, y)，使得在 $U \cap \mathfrak{W}$ 的局部坐标可以适合条件

$$y^1 = \cdots = y^r = 0, \tag{5.6.1}$$

这是用隐函数定理易知的，因此如在 a 的邻域中，f 的局部坐标表示为

$$y^\alpha = f^\alpha(x), \quad b = f(a),$$

则对 $b \in \mathfrak{W}$，f 在 a 处对于 $\mathfrak{W}$ 横截的充要条件为函数矩阵

$$\frac{\partial(y^1, \cdots, y^r)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}, \tag{5.6.2}$$

在 a 点之秩为 r，因此必须 $r \leqslant m$. 如令 $\pi: R^n \to R^r$ 为投影

$$\pi(y^1, \cdots, y^n) = (y^1, \cdots, y^r), \tag{5.6.3}$$

则 $\pi \circ y \circ f$ 是映 a 的邻域入 R^r 的映照，在 a 点是常点，而$(0, \cdots, 0)$是常值.

由(5.6.1)与(5.6.2)可知，在 a 的邻域 U 中，映照 $f^{-1}(\mathfrak{W}) \cap U$ 的点的局部坐标适合方程

$$f^1(x) = 0, \cdots, f^r(x) = 0, \tag{5.6.4}$$

可取 U 适当地小，使 $\dfrac{\partial(f^1, \cdots, f^r)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}$ 之秩为 r[†]. 据 § 5.1 之例一，$f^{-1}(\mathfrak{W}) \cap U$ 是一 $m-r$ 维流形，这对所有 $a \in f^{-1}(\mathfrak{W})$ 皆有此性质，故有

命题 5.6.1 如微分映照 $f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 对于 $\mathfrak{N}$ 的子流形 $\mathfrak{W}$ 是

---

† 此即，如 $a \in \mathfrak{M}$ 是对 $\mathfrak{W}$ 横截，则有一 a 的邻域，其所有点皆是对 $\mathfrak{W}$ 横截.

横截的，则或者 $f^{-1}(\mathfrak{W})$ 是空集或者是 $\mathfrak{M}$ 的补维为 r 的子流形.

注意本节皆假定 $\dim\mathfrak{M}=m, \dim\mathfrak{N}=n, \dim\mathfrak{W}=n-r$. 由于 (5.6.4) 中, $f^1,\cdots,f^r$ 的函数矩阵之秩为 r，故可以选取坐标 $\tilde{x}$，使 $\tilde{x}^1=f^1(x),\cdots,\tilde{x}^r=f^r(x)$ 及 U 充分小，使得在 U 中 $f^{-1}(\mathfrak{W})\cap U$ 的点的坐标由 $\tilde{x}^1=0,\cdots,\tilde{x}^r=0$ 所决定. 而映照坐标表示 (5.6.2) 化为下面的形式

$$y^1=\tilde{x}^1,\cdots,y^r=\tilde{x}^r, y^\alpha=\tilde{f}^\alpha(\tilde{x});\alpha=r+1,\cdots,n.$$

引理 5.6.2 设 V 是 R^m 的开集，微分映照 $f:V\to R^n$ 对于平面 $P=\{y\in R^n|y^1=\cdots=y^r=0\}$ 是在 V 的一紧集 K 的所有点是横截的，则存在正数 $\varepsilon>0$，使得任一微分映照 $g:V\to R^n$ 适合 $\|f-g\|_{1,V}<\varepsilon$ 时，g 对于 P 在所有 K 的点是横截的.

证 由于在 K 所有点横截等价于 $\pi\circ f$ 在 K 中没有非常点使得值为 $(0,0,\cdots,0)$. 若 $m<r$，据横截定义，必须 $0\bar{\in}\pi\circ f(K)$. K 是紧的，必有正数 ε，使得 0 到 $\pi\circ f(K)$ 之距离为 ε，则当 $|g-f|<\varepsilon$ 时 $|\pi\circ g-\pi\circ f|<\varepsilon$, $0\bar{\in}\pi\circ g$，即 0 是常值.

如 $r\leqslant m$，由 (5.6.4) 可知，$(\pi\circ f)^{-1}(0)$ 是一闭集，因此 $(\pi\circ f)^{-1}(0)\cap K$ 是紧的. 我们用有限多个 V 中的开集 V_j 把它盖过，V_j 的选取使 $\bar{V}_j$ 是紧的，而且 $\bar{V}_j\subset V$，而且在 V_j 中 $\dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^r)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}$ 之秩为 r. 由于 $\Sigma\bar{V}_j$ 是紧的，由命题 5.5.2 的证明中知道，如果 $\|f-g\|_{1,V}<\varepsilon$，$\varepsilon$ 为充分小的正数时，$\dfrac{\partial(g^1,\cdots,g^r)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}$ 在 $\bar{V}_j$ 之秩仍为 r. 此外 $K_1=K-\bigcup\limits_{j=1} V_j$ 是闭集，且包含于 K，因此亦是紧集，$0\bar{\in}\pi\circ f(K_1)$，因此 0 到 $\pi\circ f(K_1)$ 有一正距离 ε_1，取 $\varepsilon<\varepsilon_1$. 由 $|f|<|g|+\varepsilon$ 可知 $|\pi\circ g|>|\pi\circ f|-\varepsilon>0$，$(\pi\circ g)^{-1}(0)\cap K$ 不属于 K_1，即包含于

$\bigcup_j V_j$ 中，因此 g 对于 P 是横截的．引理得证．

令 $C(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ 表示由映 $\mathfrak{M}$ 入 $\mathfrak{N}$ 内的微分映照，$f_0\in C(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$．取 $\mathfrak{B}=\{(V_\nu,\psi_\nu)\}_{\nu=1,2,\cdots}$ 是 $\mathfrak{N}$ 中的一个局部有限的图册，即 $\{V_\nu\}$ 是局部有限的且 $\bar{V}_\nu$ 是紧的．取 $\mathfrak{A}=\{(U_\mu,\varphi_\mu)\}_{\mu=1,2,\cdots}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的一个局部有限图册，使得每一 $\bar{U}_\mu$ 是紧的，且对应有 $\nu(\mu)$，使得 $f_0(\bar{U}_\mu)\subset V_{\nu(\mu)}$．此外有紧集 $K_\mu\subset U_\mu$ 使 $\sum K_\mu=\mathfrak{M}$．令 $\varepsilon=\{\varepsilon_{\mu\nu}\}$ 为一组正数，$\mathfrak{M}=\{m_{\mu\nu}\}$ 为一组非负整数，

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathfrak{W},\mathfrak{U},\varepsilon,\mathfrak{M},f_0).$$

表示如此的 $f\in C(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$，使得当 $f_0(\bar{U}_\mu)\subset V_\nu$ 时，

$$f(\bar{U}_\mu)\subset V_\nu \tag{5.6.4$'$}$$

成立．此外 当 $f(\bar{U}_\mu)\subset V_\nu$ 时，有

$$|D^\alpha(f-f_0)(p)|<\varepsilon_{\mu\nu},\ 对\ \forall p\in K_\mu,|\alpha|\leqslant m_{\mu\nu}, \tag{5.6.5}$$

这里 $D^\alpha(f-f_0)(p)$ 即为

$$D^\alpha[(\psi_\nu\circ f\circ\varphi_\mu^{-1})-(\psi_\nu\circ f_0\circ\varphi_\mu^{-1})]\varphi_\mu(p)$$

之简写．以 $\mathfrak{B}(\mathfrak{W},\mathfrak{A},\varepsilon,\mathfrak{M},f_0)$ 作为 f_0 的邻域的基本系，则定义了 $C(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ 的一拓扑．与上节一样，可证此拓扑与 $\mathfrak{W}$ 及 $\mathfrak{A}$ 之选取无关．

定理 5.6.3（Thom 横截定理） 设有微分映照 $f_0:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 及 $\mathfrak{N}$ 的一个给定的子流形 $\mathfrak{W}$，则任与的 $\mathfrak{B}(\mathfrak{W},\mathfrak{A},\varepsilon,\mathfrak{M},f_0)$ 必有 $f\in\mathfrak{B}$，使 f 对于 $\mathfrak{W}$ 是横截的．

证 设我们已构造一串 $f_0,f_1,\cdots,f_l\in C(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$，适合

(a_l) $f_l(\bar{U}_\mu)\subset V_\nu$，并且

$$|D^\alpha(f_l-f_0)(p)|<\varepsilon_{\mu\nu},\ 当\ p\in K_\mu,|\alpha|\leqslant m_{\mu\nu}.$$

(b_l) f_l 在 $\bigcup_{\mu=0}^{l}K_\mu(K_0=\phi)$ 对于 $\mathfrak{W}$ 是横截的．

(c_l) $\operatorname{supp}(f_{s+1}-f_s)\subset U_{s+1}$，当 $s=0,1,\cdots,l-1$．

现在来构造 f_{l+1}．取开集 W_1,W_2 使得 $K_{l+1}\subset W_1,W_1\subset\bar{W}_1$

$\subset W_2 \subset \overline{W}_2 \subset U_{l+1}$. 作可微分函数 α_l，使其在 W_1 上恒为 1，在 W_2 之外恒为 0，而且在 $\mathfrak{M}$ 上有 $0 \leqslant \alpha_l \leqslant 1$. 据假设，$f_l(\overline{U}_{l+1})$ 包含于 $\mathfrak{N}$ 的某一个坐标邻域 V_ν 之中，命坐标系为 y，我们仅需讨论 $f_l(U_{l+1})$ 与 $\mathfrak{W}$ 有交的情形，否则取 $f_{l+1} = f_l$ 就可以了. 今无妨假定坐标系 y 适合 (5.6.1). 据 Sard 定理 $\pi \circ y \circ f_l(U_{l+1})$ 的非常值测度为 0，因此必有 $a = (a^1, \cdots, a^n)$，使得 $\pi(a)$ 在原点的充分小邻域中，而 $\pi(a)$ 不是非常值，作

$$f_{l+1}(p) = \begin{cases} y^{-1} \circ [y \circ f_l(p) - \alpha_l(p) a], & 在\ U_{l+1}, \\ f_l(p), & 在\ \mathfrak{M} - U_{l+1}. \end{cases}$$

在 K_{l+1} 之中. 如果 p 使得

$$\pi \circ y \circ f_{l+1}(p) = \pi \circ y \circ f_l(p) - \alpha_l(p) \pi(a) = 0,$$

则 p 必是 f_l 的常点，因而原点是 $\pi \circ y \circ f_{l+1}$ 的常值，因而不存在非常点 $p \in K_{l+1}$，使 $\pi \circ y \circ f_{l+1}(p) = 0$. 当 $p \in \overline{W}_2 \cap \left(\sum_{s=1}^{l} K_s \right)$，我们可取 $|a|$ 充分小，由于在 U_{l+1} 上

$$\| y \circ f_{l+1}(p) - y \circ f_l(p) \|_{1, U_{l+1}} \leqslant M |a|,$$

据引理 5.6.2 可知，$f_{l+1}(p)$ 在 $\overline{W}_2 \cap \left(\sum_{s=1}^{l} K_s \right)$ 对于 $\mathfrak{W}$ 横截，而在 W_2 之外，$f_{l+1} = f_l$ 在 $\bigcup_{s=1}^{l} K_s$ 对 $\mathfrak{W}$ 横截. 因而 f_{l+1} 在 $K_{l+1} \cup \left(\sum_{s=1}^{l} K_s \right)$ 对 $\mathfrak{W}$ 横截，故 (b_{l+1}) 条件适合. 关于 (a_{l+1}) 与 (c_{l+1}) 只要取 a 充分小就容易证明，最后取 $f = \lim\limits_{l \to \infty} f_l$，便是定理所求. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] N. Bourbaki, Topologie Génèrale, Chap. 1—2, Paris, Hermann & Cie, *Editeurs* (1951).

[2] A. B. Brown, Functional dependence, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, **72**, 959 (1960).

[3] C. Chevalley, Theory of Lie groups, Princeton (1944).

[4] J. L. Kelley, General topology, N. Y., Van Nostrand (1955).

[5] J. Milnor, Differential Topology, Princeton University (1958).

[6] A. P. Morse, The behavious of a function on its critical set, *Annals Math.*, **40**, 62 (1939).

[7] R. Narasimhan, Analysis on real and complex manifolds, 2d ed New York, North-Holland Pub. Co. (1973).

[8] R. Navanlinna, (陆启铿译),单值化,科学出版社(1960).

[9] A. Sard, The measure of the critical values of differential maps, *Bull. Math. Soc.*, **48**, 883 (1942).

[10] R. Thom, Un lemma sur les Applications differentiable, Bol. Soc. Math. Mexicana, 59 (1956).

[11] 华罗庚，数论导引，科学出版社(1957).

[12] 吴新谋，数学物理方程，第一册，科学出版社(1959).

第六章 黎曼几何

§ 6.1 切丛与线性联络

设$\mathfrak{M}$是m维微分流形. 由于$\mathfrak{M}$是局部欧几里德的,即每一点p,有一坐标邻域U及坐标系x,故我们可以在$\mathfrak{M}$上定义向量场、张量场、线性联络等,只要在局部邻域U上如§1.5和§1.6一样定义. 由于§1.5的符号与坐标及标架的选取无关,这些符号完全可以应用在微分流形上.

以$\mathfrak{M}_p$表p点的切空间. 令

$$T\mathfrak{M} = \sum_{p \in \mathfrak{M}} \mathfrak{M}_p,$$

即$T\mathfrak{M}$是所有切空间的所有切向量的总和. 如U是$\mathfrak{M}$的开集,

$$TU = \sum_{p \in U} \mathfrak{M}_p$$

定义为$T\mathfrak{M}$的开集. 下面证明TU可与R^{2m}的开集一一对应,于是$T\mathfrak{M}$有一拓扑. 有一自然投影

$$\pi: T\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$$

即$u \in \mathfrak{M}_p$时,$\pi(u) = p$. 由于$\pi^{-1}(U) = TU$,故π是连续的. $T\mathfrak{M}$称为$\mathfrak{M}$的**切丛**.

$T\mathfrak{M}$是一$2m$维微分流形,因为若(U, x)是$\mathfrak{M}$的图,$v \in \mathfrak{M}_p$,则有映照$\mathfrak{x}: TU \to x(U) \times R^m$如下:

$$\mathfrak{x}(v) = (x(p), vx^1, \cdots, vx^m). \tag{6.1.1}$$

注意,由§1.5可知,v可写为$v = (vx^i)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$,故$\mathfrak{x}^i = x^i$,

$\mathfrak{x}^{m+i} = vx^i$. 图$(T(U), \mathfrak{x})$称为相配于$(U, x)$的从图.如 $(\tilde{U}, \tilde{x})$ 是 $\mathfrak{M}$ 中另一图,当 $(a, b) \in x(U \cap \tilde{U}) \times R^m$ 时,由 $v = b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $= b^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}$ 可知,

$$\tilde{\mathfrak{x}} \circ \mathfrak{x}^{-1}(a, b) = \left(\tilde{x} \circ x^{-1}(a), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} b^i, \cdots, \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^i} b^i\right). \quad (6.1.2)$$

由此可见,坐标变换是可微分的,故 $T\mathfrak{M}$ 是 $2m$ 维微分流形.

如 $p \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_p = \pi^{-1}(p)$ 称为 p 点上的**纤维**. 若U是$\mathfrak{M}$的开集,微分映照 $X: U \to T\mathfrak{M}$ 满足

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_U,$$

其中 id_U 是U中的恒同映照,即 $\mathrm{id}_U(p) = p$, 则X称为U上的截面. 令 $X_{|p}$ 表X限制在 p 点, 则 $X_{|p} \in \mathfrak{M}_p$, 它可写为

$$X_{|p} = \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,$$

其中 $\xi^i(p) = X_{|p} x^i$ 是 p 的可微分函数,因此X是U中的可微分向量场. 反之,如X是U的可微分向量场, 则 $X: U \to T\mathfrak{M}$ 是一U上的截面. 令 $\mathfrak{x}$ 是相配于 x 的坐标系,则有

$$\mathfrak{x} \circ X \circ x^{-1} = (x, \varphi^1, \cdots \varphi^m) \circ x^{-1}. \quad (6.1.3)$$

若$\mathfrak{M}$与$\mathfrak{N}$是m维与n维微分流形,微分映照 $f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 诱导出 $f_*: T\mathfrak{M} \to T\mathfrak{N}$ 如下. 由 § 1.7 可知, 任一 $v \in \mathfrak{M}_p$ 有一 $f_* v \in \mathfrak{N}_{f(p)}$, 我们有以下的交换图

$$\begin{array}{ccc} T\mathfrak{M} & \xrightarrow{f_*} & T\mathfrak{N} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{N} \end{array}, \quad 即 \ f \circ \pi = \pi \circ f_*.$$

引理 6.1.1 由微分映照$f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$诱导出的映照$f_*: T\mathfrak{M} \to T\mathfrak{N}$是可微分的.

证明 设(U, x)是$\mathfrak{M}$的图,取U使$f(U)$包含于$\mathfrak{N}$的坐标

邻域 V 中，V 的坐标系是 y。令 $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ 为相配的坐标系。如 $v\in \mathfrak{M}_p\subset TU$，由(6.1.1)

$$\mathfrak{x}(U)=(x(p),\xi),\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m)=(vx^1,\cdots,vx^m)$$

及 $$(\mathfrak{y}\circ f_*)(v)=(y(f(p)),\eta),\eta=(\eta^1,\cdots,\eta^m)$$
$$=((f_*v)y^1,\cdots,(f_*v)y^m),$$

由于 $\eta^\alpha=\xi^i\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$ $(\alpha=1,\cdots,n)$，显然是 ξ 及 x 的可微分函数，证完。

令 $\mathscr{D}(\mathfrak{M})$ 为 $\mathfrak{M}$ 上所有的可微分向量场。$\nabla:\mathscr{D}(\mathfrak{M})\times\mathscr{D}(\mathfrak{M})\to\mathscr{D}(\mathfrak{M})$ 是一线性联络(见§1.6)。任一 $X\in\mathscr{D}(\mathfrak{M})$ 定义了一截面 $X:\mathfrak{M}\to T\mathfrak{M}$，由此诱导出 $X_*:T\mathfrak{M}\to TT\mathfrak{M}$，如下：若 $v\in\mathfrak{M}_p\subset T\mathfrak{M}$，$v=a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 而 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，则

$$X_*v=a^i\frac{\partial\mathfrak{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}^\alpha}=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+a^i\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\xi^k}$$
$$=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}-a^l\xi^k\Gamma^i_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi^i}+a^l\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}+\xi^k\Gamma^i_{kl}\right)\frac{\partial}{\partial\xi^i},$$

其中 $\Gamma^i_{kl}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\dfrac{\partial}{\partial x^k}$，而据(1.6.1)，$\nabla_vX=a^l\left(\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x^l}+\xi^k\Gamma^i_{kl}\right)\times\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，注意上式 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 的系数和前一式第三项 $\dfrac{\partial}{\partial\xi^i}$ 的系数相同。我们定义一映照

$$\mathscr{K}:TT\mathfrak{M}\to T\mathfrak{M},$$

使得

$$\mathscr{K}(X_*v)=\nabla_vX. \tag{6.1.4}$$

设 $u=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in\mathfrak{M}_p\subset T\mathfrak{M}$，$w=b^\alpha\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{x}^\alpha}=b^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+b^{m+i}\dfrac{\partial}{\partial\xi^i}\in(T\mathfrak{M})_u\subset TT\mathfrak{M}$，定义，

$$\mathscr{K}(w)=(b^{m+i}+b^l\xi^k\Gamma^i_{kl})\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (6.1.5)$$

由于w的 $TT\mathfrak{M}$ 中坐标为 (x,ξ,b), $\mathscr{K}(w)$在 $T\mathfrak{M}$ 中的坐标为 (x,η), $\eta^i=b^{m+i}+b^l\xi^k\Gamma^i_{kl}$, 显然映照$\mathscr{K}$是可微分的，$\mathscr{K}$称为联络映照。如 $w\in TT\mathfrak{M}$, 适合 $\mathscr{K}w=\mathscr{K}(w)=0$, w称为**水平的**.

又由 $\pi:T\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ 诱导出 $\pi_*:TT\mathfrak{M}\to T\mathfrak{M}$, 如 $w=b^a\frac{\partial}{\partial\xi^a}$, 显然 $\pi_*w=b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 如 $\pi_*w=0$, w称为**垂直的**.

现在把向量场的概念推广．设 $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ 是微分流形，$f:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$是微分映照，微分映照 $X:\mathfrak{N}\to T\mathfrak{M}$ 称为**沿 f 的向量场**，如 $\pi\circ X=f$. 令所有**沿 f 的向量场**为 $\mathfrak{V}_f$. 例如 $X\in\mathscr{D}(\mathfrak{M})$, $X\circ f:\mathfrak{N}\to T\mathfrak{M}$ 定义为 $p\longmapsto X_{|f(p)}$, $X\circ f$ 就是沿 f 的向量场．又如 $A\in\mathscr{D}(\mathfrak{N})$, $f_*A:\mathfrak{N}\to T\mathfrak{M}$, 定义为 $f_*A=f_*\circ A$, 据引理 6.1.1, f_*A 是沿 f 的可微分向量场，f_*A 称为**沿 f 的切向量场**．沿 f 的切向量场的集合记之为 $\mathfrak{V}^T_f$.

设 $p\in\mathfrak{N}$, (U,x)是$\mathfrak{M}$的图，$f(p)\in U$. 令 $V=f^{-1}(U)$. 对任一 $Y\in\mathfrak{V}_f$, 有局部表示$Y=\xi^i(f(p))\frac{\partial}{\partial x^i}=Yx^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 其中 $\xi^i(f(p))$ 是V中可微分函数．

现设∇是 $\mathfrak{M}$ 的线性联络，$A\in\mathscr{D}(\mathfrak{N})$, $Y\in\mathfrak{V}_f$, 则

$$\mathfrak{N}\xrightarrow{A}T\mathfrak{N}\xrightarrow{Y_*}TT\mathfrak{M}\xrightarrow{\mathscr{K}}T\mathfrak{M},$$

其中$\mathscr{K}$是∇的联络映照．定义

$$\nabla_AY=\mathscr{K}Y_*A. \qquad (6.1.6)$$

设(U,x)是 $\mathfrak{M}$ 的图，$Y=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in\mathfrak{V}_f$, ξ 是相配于 x 的$T\mathfrak{M}$的从坐标，(V,y) 是 $\mathfrak{N}$ 的图，$f(V)\subset U$, A 在V中设为 $A=$

$a^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$,

$$Y_* A = \sum_{c=1}^{2m} a^\alpha \frac{\partial \xi^c}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^c} = a^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + a^\alpha \frac{\partial \xi^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

$$= a^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} - a^\alpha \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \xi^k \Gamma^j_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^j}$$

$$+ a^\alpha \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \xi^k \Gamma^j_{kl} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^j},$$

于是

$$\mathscr{K} Y_* A = \nabla_A Y = a^\alpha \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial y^\alpha} + \xi^k \Gamma^j_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (6.1.7)$$

由此可知,如 $f:\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ 是微分映照,$\mathfrak{M}$ 的线性联络可以扩充为

$$\nabla : \mathscr{D}(\mathfrak{N}) \times \mathfrak{B}_f \to \mathfrak{B}_f.$$

如果 $A, B \in \mathscr{D}(\mathfrak{N})$, $X, Y \in \mathfrak{B}_f$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}^\circ(\mathfrak{N})$, 则有

$$\nabla_{\varphi A + \psi B} Y = \varphi \nabla_A Y + \psi \nabla_B Y, \quad (6.1.8)$$

$$\nabla_A(\varphi X + \psi Y) = \varphi \nabla_A X + (A\varphi) X + \psi \nabla_A Y + (A\psi) Y. \quad (6.1.9)$$

此外,$\mathfrak{M}$ 的挠率张量与曲率张量(见式(1.6.7))有如下性质:

$$T(f_* A, f_* B) = \nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A - f_*[A, B], \quad (6.1.10)$$

$$R(f_* A, f_* B) Y = \nabla_A \nabla_B Y - \nabla_B \nabla_A Y - \nabla_{[A,B]} Y. \quad (6.1.11)$$

例如(6.1.10), 设在 $\mathfrak{N}$ 的图为 (U, y),

$$A = a^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad B = b^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

则 $$f_* A = a^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_* B = b^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

根据 $T(X, Y)$ 的性质可知

$$T(f_*A, f_*B) = a^\alpha b^\beta \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta} T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$= a^\alpha b^\beta \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

另一方面，根据(6.1.7)可知

$$\nabla_A f_* B = a^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(b^\beta \frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\right) + \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} b^\beta \frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\Gamma^i_{kl}\right]\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\nabla_B f_* A = b^\beta \left[\frac{\partial}{\partial y^\beta}\left(a^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right) + \frac{\partial x^l}{\partial y^\beta} a^\alpha \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha}\Gamma^i_{kl}\right]\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

由此可知，

$$\nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A = a^\alpha b^\beta \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^l} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$+ \left(a^\alpha \frac{\partial b^\beta}{\partial y^\alpha} - b^\alpha \frac{\partial a^\beta}{\partial y^\alpha}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

由于 $f_*[A, B] = \left(a^\alpha \dfrac{\partial b^\beta}{\partial y^\alpha} - b^\alpha \dfrac{\partial a^\beta}{\partial y^\alpha}\right)\dfrac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,

这就证明了(6.1.10). 类似地可证明(6.1.11).

§6.2　平行移动；测地线

设 $\mathfrak{M}$ 是 m 维微分流形，J 是 R 中区间. $\mathfrak{M}$ 中的一**曲线**或**途径**是一连续映照 $c: J \to \mathfrak{M}$. 如 J 是紧的，即 $J = [\alpha, \beta]$, 则称 $c(\alpha)$ 是 c 的始点，$c(\beta)$ 称为终点. c 称为闭的，如 $c(\alpha) = c(\beta)$.

设 ∇ 是 $\mathfrak{M}$ 上的线性联络，c 是 $\mathfrak{M}$ 中的可微分曲线，若 c 的坐标系为 t, 于是 $\dfrac{d}{dt}$ 是 J 的向量场. 一向量场 $X \in \mathfrak{V}_c$ 称为沿

c 平行，若

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0. \tag{6.2.1}$$

根据(6.1.7),若$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$,$(U,x)$是$\mathfrak{M}$的图,则在$c\cap U$中

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X = \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{kl}\xi^k\frac{dx^l}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

因此当X沿c平行,即ξ^i适合

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{kl}\xi^k\frac{dx^l}{dt} = 0. \tag{6.2.2}$$

由一阶常微分方程理论可知,如$t_0\in J$, $v\in\mathfrak{M}_{c(t_0)}$,则存在唯一的沿$c$的平行向量场$X$,使得$X_{|t_0}=v$。令

$$\dot{c} = c_*\frac{d}{dt} \tag{6.2.3}$$

于是在图(U,x)中,当$c\cap U\neq\Phi$时,则

$$\dot{c} = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.2.4}$$

$\dot{c}$称为沿c的切向量场. 如果沿c的切向量场是平行的，即$\nabla_{\frac{d}{dt}}\dot{c}=0$，则$c$称为测地线. 由(6.2.4)及(6.2.2)可知,局部地有

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0. \tag{6.2.5}$$

由二阶微分方程的理论可知（例如见 Miller 与 Murray [3]),如令$t_0=0$,给与$c(t_0)=p$, p的坐标为$x(p)=a$及$\dot{c}(t_0)=v=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in\mathfrak{M}_p$,有唯一的测地线满足

$$x^i(0) = a^i, \quad \left[\frac{dx^i}{dt}\right]_{t=0} = \xi^i.$$

即有一正数 ε，使得方程（6.2.5）有唯一的解

$$x^i = \varphi^i(t, a, \xi), \tag{6.2.6}$$

这是在 $|t| \leqslant 2\varepsilon$，$|a^i| \leqslant \varepsilon$，$|\xi^i| \leqslant \varepsilon$ 的一邻域中的可微函数，使得

$$|x^i(t)| < C, \quad \left|\frac{dx^i}{dt}\right| < K, \quad 当 |t| \leqslant 2\varepsilon.$$

此即存在唯一的测地线 $\gamma_v: J \to \mathfrak{M}$，$J = [-\varepsilon, \varepsilon]$，适合 $\gamma_v(0) = p$，p 的局部坐标为 a^i，$\dot{\gamma}_v(0) = v = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

定理 6.2.1 设 $\mathfrak{M}$ 是具有线性联络 ∇ 的微分流形，p 是 $\mathfrak{M}$ 中任一点，则存在 $\mathfrak{M}_p$ 的 0 点的邻域 N_0 及 $\mathfrak{M}$ 的 p 点的邻域 N_p，使得映照 $v \longmapsto \gamma_v(1)$ 是 $N_0 \to N_p$ 的微分同胚.

证 现设 $x(p) = 0$. 令 $\psi^i(t, \xi) = \varphi^i(t, 0, \xi)$，其中 $\varphi^i(t, 0, \xi)$ 由（6.2.6）定义．于是

$$\psi^i(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial t}(0, \xi) = \xi^i,$$

当 $|s| \leqslant 1$，$|t| \leqslant 2\varepsilon$，$|\xi^i| \leqslant \varepsilon$ 时，由解的唯一性可知

$$\psi^i(st, \xi) = \psi^i(t, s\xi),$$

因为此两组函数有相同的初值条件．此外，在 $t = 0$ 附近作 Taylor 展开有

$$x^i = \psi^i(\varepsilon, \xi) = \xi^i\varepsilon - \varepsilon^2\Gamma^i_{kl}(\varepsilon^*)\xi^k\xi^l, (0 \leqslant \varepsilon^* \leqslant \varepsilon).$$

由此可见变换

$$(\xi^1, \cdots, \xi^m) \to (\psi^1(\varepsilon, \xi), \cdots \psi^m(\varepsilon, \xi))$$

的函数方阵在 $\xi = 0$ 非异，因此 $v = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \longmapsto \gamma_v(\varepsilon)$ 是局部一一的．而 $\gamma_{\varepsilon v}(1) = \gamma_v(\varepsilon)$，定理得证.

由定理 6.2.1 定义的微分映照 $v \mapsto \gamma_v(1)$ 称为 p 点的**指数映照**，用 Exp_p 或 Exp 表示。如果 $\mathfrak{M}_p$ 中的 0 点的邻域 N_0 取之使得：（i）有一 p 的邻域 N_p 使 $N_0 \to N_p$，即 Exp 是微分同胚，(ii)当 $X \in N_0$，如 $0 \leqslant t \leqslant 1$，则有 $tX \in N_0$，则 N_0 称为 $\mathfrak{M}_p$ 的原点的**正则邻域**。$\mathfrak{M}$ 的 p 点的邻域 N_p 称为 p 点的**正则邻域**，如 $N_p = \mathrm{Exp} N_0$。取 $X_1, \cdots, X_m$ 是 $\mathfrak{M}_p$ 的一组基，N_p 的逆映照

$$\mathrm{Exp}\ a^j X_j \longmapsto (a^1, \cdots, a^m)$$

称为 p 点的**正则坐标系**。由此可见

$$\gamma_X(t) = \mathrm{Exp}\, tX, X \in N_0, 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是 N_p 中的测地线，即 N_0 中任一点 X 与 $\mathfrak{M}_p$ 中原点的直线段 $tX, 0 \leqslant t \leqslant 1$，经 Exp 映为 N_p 中的测地线 $\mathrm{Exp}\, tX, 0 \leqslant t \leqslant 1$。故 p 点的正则邻域 N_p 中任一点 q 有唯一的在 N_p 中的测地线 $\gamma_X(t)$ 与 p 点相联。

定理 6.2.2 设 $\mathfrak{M}$ 是 m 维微分流形具线性联络 ∇，则任一点 $p \in \mathfrak{M}$ 有一正则邻域 N_p，它也是此邻域中每一点的正则邻域。特别是 N_p 中，任两点可有唯一的在 N_p 中的测地线通过之。

取 (U, x) 是 $\mathfrak{M}$ 的图，$p \in U$。任一点 $q_0 \in U$，有一充分小正数 η，使得

$$V_\eta(q_0) = \{q \in U \mid \Sigma(x^j(q) - x^j(q_0))^2 < \eta^2\} \subset U,$$

$V_\eta(q_0)$ 称为 q_0 点的半径为 η 的球邻域。令 $\varphi^j(t, a, \xi)$ 为方程(6.2.5)的解如前，其中 $a = x(q_0)$，于是有映照

$$\varphi_a : \xi^j \longmapsto x^j = \varphi^j(\varepsilon, a, \xi) = a^j + \xi^j \varepsilon - \varepsilon^2 \xi^k \xi^l \Gamma^j_{kl}(\theta^*).$$

由于 $\varphi(\varepsilon, a, \xi)$ 对 a 及 ξ 可微分，故任与正数 ε_0，必有正数 δ_0 使得当 $|a| \leqslant \delta_0$ 时有

$$|\varphi(\varepsilon, a, \xi) - \varphi(\varepsilon, 0, \xi)| < \varepsilon_0,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi^j}[\varphi(\varepsilon,a,\xi)-\varphi(\varepsilon,0,\xi)]\right|<\varepsilon_0,\ j=1,\cdots,m$$

对所有 $|\xi|\leqslant\varepsilon$.

已知 $\varphi_0:\xi\longmapsto x=\varphi(\varepsilon,0,\xi)$

在 $|\xi|\leqslant\varepsilon$ 是微分同胚，据引理 5.5.2 可知，可取 ε_0 充分小使得所有映照 $\varphi_a:\xi\longmapsto x=\varphi(\varepsilon,a,\xi)$ 在 $|\xi|\leqslant r(<\varepsilon)$ 皆是微分同胚.

令 $N_0=\{\xi\in R^m\,\big|\,|\xi|<r\},M_a=\varphi_a(N_0)$. 在 M_0 中以原点为中心，ρ 为半径作一超球 S_0 包含于 M_0, 设 S_0 的边界为 Σ_0, 令 $V=\varphi_0^{-1}(S_0)$. 由于同胚映照把边界点映为边界点，故 $\Gamma=\varphi_0^{-1}(\Sigma_0)$ 是 V 的边界，令 $\Sigma_a=\varphi_a(\Gamma)$. 当 $\xi\in\Gamma$ 有 $\varphi_a(\xi)\in\Sigma_a$. 由

$$|\varphi(\varepsilon,a,\xi)|\geqslant|\varphi(\varepsilon,0,\xi)|-\varepsilon_0\geqslant\rho-\varepsilon_0$$

可知，取 $\varepsilon_0<\dfrac{\rho}{2}$ 时，$\varphi_a(V)$ 包含原点为心半径为 $\rho/2$ 的超球.

取 δ_0 充分小使得 $4\delta_0\leqslant\dfrac{1}{2}\rho$. 对每一点 a 适合 $|a|\leqslant\delta_0$ 时，微分同胚 $x^{-1}\circ\varphi_a:N_0\to N_{q_0}$, 使 N_{q_0} 包含 N_p 中半径为 $4\delta_0$ 的球邻域 $V_{4\delta_0}(p)$. 这证明了

引理 6.2.3 存在正数 δ_0, 使得任一 $q\in V_{\delta_0}(p)$ 时，球邻域 $V_{2\delta_0}(q)$ 包含于 q 的正则邻域之中.

由此可知，$V_{\delta_0}(p)$ 中任取两点 q_1, q_2 最多存在一测地线连 q_1 及 q_2, 而包含于 $V_{\delta_0}(p)$ 之中. 令正数 $\delta_1<\delta_0$, 使得方阵 $(\delta_{jk}-x^l\Gamma^l_{jk})\geqslant\varepsilon_1 I$, 当 $|x|\leqslant\delta_1$, 这样的 δ_1 是存在的. 于是定理 6.2.2 包含于下述的引理中:

引理 6.2.4 任与正数 $\eta\leqslant\delta_1$, 邻域 $V_\eta(p)$ 是它的每一点的正则邻域.

证 $V_\eta(p)$ 的边界 D 是 $V_{\delta_0}(p)$ 的子流形，我们首先证

明若测地线 $\gamma: t \mapsto \gamma(t)$是在$D$的 $q_0 = \gamma(t_0)$相切，则对所有 t 充分接近 t_0 而 $\neq t_0$ 时，$\gamma(t)$ 在 $V_\eta(p)$ 之外。实际上，令 $x^j(t) = x^j(\gamma(t))$ 及

$$F(t) = x^j(t)x^j(t) - \eta^2.$$

由 Taylor 展式，

$$F(t_0 + \Delta t) = F(t_0) + \dot{F}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{F}(t_0)\Delta t^2 + 0(\Delta t^3).$$

由于 $F(t_0) = 0$, $F(t_0)$ 是 $F(t)$的局部的极大或极小，故 $\dot{F}(t_0) = 2x^j(t_0)\dot{x}^j(t_0) = 0$,

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t_0) &= 2(\dot{x}^j(t_0)\dot{x}^j(t_0) + x^j(t_0)\ddot{x}^j(t_0)) \\ &= 2(\delta_{ij} - x^k(t_0)\Gamma^k_{ij})\dot{x}^i(t_0)\dot{x}^j(t_0),\end{aligned}$$

因此，当Δt充分小$\neq 0$ 时，$F(t_0 + \Delta t) > 0$。

对任两点 $P, Q \in V_\eta(p)$只有两种可能性：

(i) 不存在 $V_\eta(p)$ 中的测地线连 P 与 Q，即连 P, Q 的唯一测地线必有点在 $\overline{V_\eta(p)}$ 之外；

(ii) 存在唯一在 $V_\eta(p)$ 中的测地线连结 P 与 Q.

令 S 为 $V_\eta(p) \times V_\eta(p)$ 的子集，$(P, Q) \in S$ 表在 $V_\eta(p)$ 中有唯一的测地线连 P 与 Q. 显然 S 非空. 若我们能证 S 既开又闭，则引理得证.

(1) S 是闭的. 令(p_λ, q_λ)是 S 的点串($\lambda = 1, 2, \cdots$)收敛于 $(p_0, q_0) \in V_\eta(p) \times V_\eta(p)$. 在 $V_\eta(p)$中以一测地线段 $t \to \gamma_\lambda(t)$ 连 p_λ 与 q_λ, 使 $\gamma_\lambda(0) = p_\lambda, \gamma_\lambda(b) = q_\lambda$. 同样以一测地线 $\gamma_0(t)(0 \leqslant t \leqslant b)$ 在 $V_{2\delta_0}(p_0)$ 联结 p_0, q_0. 考虑上述的映照 φ_a, 其中参数 a 以 $a_\lambda = (a^1_\lambda, \cdots, a^m_\lambda) = (x^1(p_\lambda), \cdots, x^m(p_\lambda))$代入，在此映照下，$q_\lambda$ 对应于 $\xi_\lambda = (\xi^1_\lambda, \cdots, \xi^m_\lambda)$. 设 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \xi_\lambda = \xi_0 = (\xi^1_0, \cdots \xi^m_0)$ 及 $\lim\limits_{\lambda\to\alpha} a_\lambda = a_0$, 于是

$$\lim \varphi^j(t, a_\lambda, \xi_\lambda) = \varphi^j(t, a_0, \xi_0),$$

这代表一测地线在 $V_{2\delta_0}(p_0)$中连 a_0 及 ξ_0 点，由唯一性可知，

$$x^i(\gamma_0(t)) = \varphi^i(t, a_0, \xi_0), \quad |t| \leqslant \varepsilon$$

代表一测地线 $t \longmapsto \gamma_0(t) = \lim\limits_{x \to \infty} \gamma_\lambda(t)$. 因此由上面的证明可知，$\gamma_0(t)$不包含有边界$D$上的点. 故$(p_0, q_0) \in S$, S是闭的.

(2) S是开的,重复上面的方法于 $V_\eta(p) \times V_\eta(p) \backslash S$,可证它是闭的. 定理证明.

设 $c: J \to \mathfrak{M}$ 是一可微分曲线连 p 与 q 点. 任一 $v \in \mathfrak{M}_p$, 有一 $X \in \mathfrak{B}_c$ 沿 c 平行，适合 $X_{\gamma(0)} = v$. 如 $q = \gamma(t)$, 则 $X_{\gamma(t)} \in \mathfrak{M}_q$, 即沿 c 的平行移动诱导出一映照 $\tau: \mathfrak{M}_p \to \mathfrak{M}_q$. 我们有

命题 6.2.5 设 $p, q \in \mathfrak{M}$, 而 c 是联 p, q 的可微分曲线，则沿 c 的平行移动诱导出一同构 $\tau: \mathfrak{M}_p \to \mathfrak{M}_q$.

证 不妨假定γ无重点而在一个坐标邻域U之中，x为坐标系. 设曲线 $c(t)(\varepsilon_1 \leqslant t \leqslant \varepsilon_2)$ 适合 $\gamma(\varepsilon_1) = p$, $\gamma(\varepsilon_2) = q$. 为方便计算，令 $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$.

由一阶常微分方程组理论可知，存在m个可微分函数 $\varphi^i(t, a^1, \cdots, a^m)$使 $\xi^i = \varphi^i(t, a)$ 适合 (6.2.2) 及 $\varphi^i(\varepsilon_1, a) = a^i$, φ^i是唯一决定的，于是对应有唯一的 $\varphi^i(\varepsilon_2, a) = b^i$. 即 $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{B}_c$, $X_p = a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, 对应唯一的 $X_q = b^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \in \mathfrak{M}_q$,

由于方程 (6.2.2) 是线性的，由唯一性可知

$$\varphi^i(t, \lambda a + \mu b) = \lambda \varphi^i(t, a) + \mu \varphi^i(t, b), \lambda, \mu \in R.$$

同样由唯一性可知，τ是满射. 命题证毕.

§6.3 黎曼流形

一m维微分流形称为**伪黎曼流形**，若在$\mathfrak{M}$上存在一二阶协变、对称、非异的可微分张量场，亦即(见§1.6)有一可微分双线性函数 $\langle X, Y\rangle$, $X, Y \in \mathfrak{M}_p$, 使

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle, \text{(对称性)}, \tag{6.3.1}$$

$$\langle X, Y\rangle = 0, \text{对所有 } X \in \mathfrak{M}_p \Rightarrow Y = 0, \text{(非异性)}. \tag{6.3.2}$$

若(6.3.2)代之以

$$\langle X, X\rangle > 0, \text{对所有 } X \neq 0, \text{(定正性)}, \tag{6.3.3}$$

则$\mathfrak{M}$称为**黎曼流形**.

据定理 1.6.1,存在唯一的黎曼联络 ∇,使得

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}), \tag{6.3.4}$$

即挠率为 0,及

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \text{对所有 } Z \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}). \tag{6.3.4$'$}$$

设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 是伪黎曼流形,$f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 是微分映照,适合

$$\langle X, Y\rangle = \langle f_* X, f_* Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{M}_p, \tag{6.3.5}$$

则 f 称为**等度的**. 如果 $\mathfrak{N}$ 是黎曼流形,则等度映照 f 必须是浸入,而且 $\mathfrak{M}$ 必须是黎曼流形. 反之,如 $\mathfrak{N}$ 是黎曼流形,$f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 是浸入,则由(6.3.5)可定义$\mathfrak{M}$上的双线性函数使之成为黎曼流形. 据 Whitney 定理(§ 6.5),$\mathfrak{M}$ 可以是 $\mathfrak{N} = R^n (n \geqslant 2m + 1)$ 的子流形,因之$\mathfrak{M}$必有黎曼度量. 但在$\mathfrak{M}$上可以引进很多黎曼度量,此即下面定理.

定理 6.3.1 设$\mathfrak{M}$是微分流形,$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$是一图册,其中$\{U_\lambda\}$是局部有限开覆盖,$\bar{U}_\lambda$ 是紧的,$\{\psi_\lambda\}$是从属于$\{U_\lambda\}$的单位分解. 任与 U_λ 中一对称的正定的二阶协变可微分张量 g_λ,则$g = \sum_\lambda \psi_\lambda g_\lambda$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的黎曼度量.

由此定理可知,我们说$\mathfrak{M}$是一黎曼流形时,我们是指$\mathfrak{M}$对某一固定的黎曼度量而言.

另一方面,我们一般地还不知道,一微分流形$\mathfrak{M}$上是否存在一伪黎曼度量具有指定的号差.

设$\widetilde{\mathfrak{M}}$是一伪黎曼流形,$\iota: \mathfrak{M} \to \widetilde{\mathfrak{M}}$ 是浸入,(U, x) 是$\mathfrak{M}$的

图，$(\tilde{U},\tilde{x})$ 是$\tilde{\mathfrak{M}}$的图，如 $\iota(U)\subset\tilde{U}$，由于U是浸入，函数矩阵 $\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}$的秩为$m$。在(6.3.5)中令

$$g_{jk}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle=\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^k}\left\langle\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha},\ \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\beta}\right\rangle$$

$$=\tilde{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^k},\qquad(6.3.6)$$

其中 $j,k=1,\cdots,m;\alpha,\ \beta=1,\cdots,n$。若$\tilde{\mathfrak{M}}$是黎曼流形，则$(g_{jk})$是正定的；若$\tilde{\mathfrak{M}}$是一般的伪黎曼流形，我们假定$(g_{jk})$恒非异，于是存在逆方阵$(g^{jk})$，令

$$L^j_\beta=g^{jk}\frac{\partial\tilde{x}^\gamma}{\partial x^k}\tilde{g}_{\beta\gamma}\qquad(6.3.7)$$

及

$$K^\alpha_\beta=L^j_\beta\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^j}.\qquad(6.3.8)$$

显而易见，K^α_β是$\tilde{\mathfrak{M}}$中在$\iota(\mathfrak{M})$的一阶逆变、一阶协变的张量场。任一沿ι的向量场$X\in\mathfrak{V}_\iota$，设其在$\tilde{U}\cap\iota(\mathfrak{M})$中可写为$X=\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha}$，则

$$X^T=\xi^\beta K^\alpha_\beta\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha}\qquad(6.3.9)$$

是沿ι的切向量场，即$X^T\in\mathfrak{V}^T_\iota$，称为$X$的**切分量**。实际上，存在$\mathfrak{M}$的向量场，在$U$中

$${}^TX=\xi^\beta L^j_\beta\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\qquad(6.3.10)$$

使得

$$\iota_*{}^TX=\xi^\beta K^\alpha_\beta\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha}=X^T,\qquad(6.3.11)$$

${}^TX \in \mathscr{D}(\mathfrak{M})$称为沿 ι 的**向量场 X 的切分量的拉回**.

令

$$V^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - K^\alpha_\beta, \tag{6.3.12}$$

而在 $\widetilde{U}$ 中,令

$$X^\perp = \xi^\beta V^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tag{6.3.13}$$

称为 X 的对 ι 的**伪正交分量**,因为

$$\langle X^T, X^\perp\rangle = 0, \tag{6.3.14}$$

这是由于下面的恒等式

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}K^\alpha_\lambda K^\beta_\mu = \tilde{g}_{\lambda\gamma}K^\gamma_\mu. \tag{6.3.15}$$

此外,尚有

$${}^T(X^T) = {}^TX, \tag{6.3.16}$$

这是由于

$$K^\alpha_\beta L^j_\alpha = L^j_\beta. \tag{6.3.17}$$

因为 X 能分解成

$$X = X^T + X^\perp, \tag{6.3.18}$$

因此 $\mathfrak{B}_\iota$ 能分解为

$$\mathfrak{B}_\iota = \mathfrak{B}^T_\iota + \mathfrak{B}^\perp_\iota, \tag{6.3.19}$$

其中 $\mathfrak{B}^\perp_\iota$ 是所有沿 ι 的法向量场的集合,$N \in \mathfrak{B}^\perp_\iota$ 当且仅当

$$\langle \iota_* A, N\rangle = 0,\ \text{对所有}\ A \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}). \tag{6.3.20}$$

又由于

$$K^\alpha_\beta K^\beta_\gamma = K^\alpha_\gamma,\quad V^\alpha_\beta V^\beta_\gamma = V^\alpha_\gamma,\quad K^\alpha_\beta V^\beta_\gamma = 0, \tag{6.3.21}$$

有 $(X^T)^T = X^T, (X^\perp)^\perp = X^\perp$.

当 $m = n$ 时, $\mathfrak{B}^T_\iota = \mathfrak{B}_\iota, \mathfrak{B}^\perp_\iota = 0$.

§ 6.4 相对曲率量; Gauss-Codazzi 方程

设 $\mathfrak{M}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是伪黎曼流形, ∇ 与 $\widetilde{\nabla}$ 分别是 $\mathfrak{M}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 的黎曼联

络，R 与 $\tilde{R}$ 分别是 $\mathfrak{M}$ 与 $\tilde{\mathfrak{M}}$ 的曲率张量。设浸入 $\iota:\mathfrak{M}\to\tilde{\mathfrak{M}}$ 是等度的。令映照 $S:\mathscr{D}(\mathfrak{M})\times\mathfrak{B}_\iota^\perp\to\mathscr{D}(\mathfrak{M})$，定义为

$$S(X,N)={}^T(\tilde{\nabla}_XN),X\in\mathscr{D}(\mathfrak{M}),N\in\mathfrak{B}_\iota^\perp. \quad (6.4.1)$$

如 $f\in\mathscr{D}^0(\mathfrak{M})$，则由于 ${}^TN=0$ 可知

$${}^T(\tilde{\nabla}_XfN)={}^T(Xf\cdot N+f\tilde{\nabla}_XN)=f^T(\tilde{\nabla}_XN),$$

因此 $S(X,N)$ 是双线性函数，因而 S 是 $\mathfrak{M}$ 中二阶协变张量，这称为第二基本张量。

若在 U 中 $X=\xi^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，在 $\tilde{U}$ 中 $N=\zeta^\lambda\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}^\lambda}$，则由(6.1.7)可知

$$\tilde{\nabla}_XN=\xi^i\left(\frac{\partial\zeta^\lambda}{\partial x^i}+\zeta^\mu\widetilde{\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\lambda}, \quad (6.4.2)$$

其中$\widetilde{\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}}$是 $\tilde{g}_{\lambda\mu}$ 的 Christoffel 符号。由(6.3.10)可知

$${}^T(\tilde{\nabla}_XN)=\xi^i\left(\frac{\partial\zeta^\lambda}{\partial x^i}+\xi^\mu\widetilde{\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^i}\right)L_\lambda^k\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^k}. \quad (6.4.3)$$

当法向量场 $N\in\mathfrak{B}_\iota^\perp$ 固定，我们令

$$S_NX=S(X,N), \quad (6.4.4)$$

而令

$$s_N(X,Y)=\langle S_NX,Y\rangle,\ \ X,Y\in\mathscr{D}(\mathfrak{M}) \quad (6.4.5)$$

称为第二基本形式。若在 U 中 $Y=\eta^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，则由(6.4.3)可知

$$s_N(X,Y)=g_{kl}\left(\frac{\partial\zeta^\lambda}{\partial x^i}+\zeta^\mu\widetilde{\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^i}\right)L_\lambda^k\xi^i\eta^l. \quad (6.4.6)$$

令

$$S_j^k=\left(\frac{\partial\zeta^\lambda}{\partial x^j}+\zeta^\mu\widetilde{\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^j}\right)L_\lambda^k,\quad S_{jk}=g_{kl}S_j^l, \quad (6.4.7)$$

则(6.4.6)可写为

$$\mathfrak{s}_N(X, Y) = S_{jl}\xi^j\eta^l. \tag{6.4.8}$$

显而易见，S^j_k 是$\mathfrak{M}$上一阶逆变、一阶协变张量场. 我们要证 S_{jk} 是对称的. 实际上，由于 $N \in \mathfrak{V}^\perp_\iota$，据(6.3.20)

$$0 = \left\langle \iota_* \frac{\partial}{\partial x^j}, N \right\rangle = \tilde{g}_{\lambda\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^j} \xi^\mu.$$

上式右边是 U 中的一阶协变张量，我们有

$$(\tilde{g}_{\lambda\mu}\tilde{x}^\lambda_{;j}\xi^\mu)_{;k} = 0.$$

为方便起见，我们令

$$\tilde{x}^\lambda_{;j} = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^j},$$

$$\xi^\mu_{;k} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^k} + \xi^\nu \widetilde{\left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\}} \tilde{x}^\sigma_{;k},$$

$$\tilde{g}_{\lambda\mu;k} = \tilde{g}_{\lambda\mu;\nu}\tilde{x}^\nu_{;k} = 0 \tag{6.4.9}$$

于是有 $\quad \tilde{g}_{\lambda\mu}\tilde{x}^\lambda_{;j}\xi^\mu_{;k} = -\tilde{g}_{\lambda\mu}\tilde{x}^\lambda_{;jk}\xi^\mu$，

其中

$$\tilde{x}^\lambda_{;jk} = \frac{\partial^2 \tilde{x}^\lambda}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^l}\left\{ {l \atop jk} \right\} + \widetilde{\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^k} \tag{6.4.10}$$

是对 j, k 对称的. 据(6.3.7),(6.4.7)可知

$$S^l_k = \xi^\mu_{;k}L^l_\mu = g^{lj}\tilde{g}_{\mu\lambda}\tilde{x}^\lambda_{;j}\xi^\mu_{;k} = -g^{lj}\tilde{g}_{\lambda\mu}\tilde{x}^\lambda_{;jk}\xi^\mu,$$

因此有

$$S_{jk} = -\tilde{g}_{\lambda\mu}\tilde{x}^\lambda_{;jk}\xi^\mu, \tag{6.4.11}$$

这是对 j, k 对称的，证毕.

定理 6.4.1 (Gauss 方程) 设$\mathfrak{M}$与$\widetilde{\mathfrak{M}}$是伪黎曼流形，$\iota: \mathfrak{M} \to \widetilde{\mathfrak{M}}$是等度映照，$X, Y \in \mathscr{D}(\mathfrak{M})$，则有

$$\tilde{\nabla}_X \iota_* Y = \iota_*(\nabla_X Y) + V(X, Y),$$

其中 $V(X, Y) \in \mathfrak{V}^\perp_\iota$. 局部地，如 $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，有

$$V(X, Y) = \xi^j \eta^k \tilde{x}^\lambda_{;jk} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda}. \tag{6.4.12}$$

证 由(6.4.10)可知，当 $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$，$Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$时

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \tilde{x}^\lambda_{;jk} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^k}\right) + \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^k} \widetilde{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^j}\right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda} - \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda} \\
&= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda} - \iota_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \iota_* \frac{\partial}{\partial x^k} - \iota_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

这证明定理的第一部分.

由于

$$\begin{aligned}
K^\mu_\lambda \tilde{x}^\lambda_{;jk} &= g^{pq} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^p} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^q} \tilde{g}_{\sigma\lambda} \tilde{x}^\lambda_{;jk} \\
&= \frac{1}{2} g^{pq} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^p} (\tilde{g}_{\sigma\lambda} \tilde{x}^\sigma_{;q} \tilde{x}^\lambda_{;j})_{;k} \\
&= \frac{1}{2} g^{pq} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^p} g_{qj;k} = 0,
\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

此即

$$V\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \in \mathfrak{B}^\perp_\iota. \tag{6.4.15}$$

这证明定理. 注意，显然有

$$\iota_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{B}^T_\iota,$$

因此定理是把 $\tilde{\nabla}_X \iota_* Y$ 分解为切向与法向两部分.

设 $p \in \mathfrak{M}$，令$\mathfrak{M}^\perp_p = (\iota_* \mathfrak{M}_p)^\perp$，及

$$S_w(u) = S(u, w), u \in \mathfrak{M}_p, w \in \mathfrak{M}_p^{\perp}, \tag{6.4.16}$$

于是定义了一线性映照 $S_w: \mathfrak{M}_p \to \mathfrak{M}_p$. S_w 的特征根 λ, 即 $S_w(u) = \lambda u$, 称为$\mathfrak{M}$在 p 点的**主曲率**. 如$\mathfrak{M}$与$\widetilde{\mathfrak{M}}$为黎曼流形，单位的特征向量 u 称为**主曲率向量**, S_w 的不变量称为对于法线方向w 的**相对曲率量**,其中常用的是**平均曲率**

$$H_w = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(S_w) = \frac{1}{n} g^{jk}S_{jk} \tag{6.4.17}$$

及 Gauss-Kronecker 曲率

$$G_w = \det S_w = \det(S_k^j)_{1\leqslant j,k\leqslant m}. \tag{6.4.18}$$

定理 6.4.2 (Gauss-Codazzi 方程) 设$\mathfrak{M}$与$\widetilde{\mathfrak{M}}$是黎曼流形，浸入 $\iota: \mathfrak{M} \to \widetilde{\mathfrak{M}}$是等度的，$n = \dim\widetilde{\mathfrak{M}} \geqslant 2$, 对任意的 $X, Y, Z, W \in \mathscr{D}(\mathfrak{M})$ 有

(i) Gauss 曲率方程

$$(\widetilde{R}(\iota_*X, \iota_*Y)\iota_*Z)^T - \iota_*(R(X, Y)Z)$$
$$= [\widetilde{\nabla}_X V(Y, Z) - \widetilde{\nabla}_Y V(X, Z)]^T; \tag{6.4.19}$$

特别是

$$\langle \widetilde{R}(\iota_*X, \iota_*Y)\iota_*W, \iota_*Z\rangle - \langle R(X, Y)W, Z\rangle$$
$$= \langle \widetilde{\nabla}_X V(Y, W), \iota_*Z\rangle - \langle \widetilde{\nabla}_Y V(X, W), \iota_*Z\rangle \tag{6.4.20}$$

以及

$$\langle \widetilde{R}(\iota_*X, \iota_*Y)\iota_*Y, \iota_*X\rangle - \langle R(X, Y)Y, X\rangle$$
$$= \langle \widetilde{\nabla}_X V(X, Y), \iota_*X\rangle - \langle \widetilde{\nabla}_Y V(X, Y), \iota_*X\rangle. \tag{6.4.21}$$

(ii) Codazzi 方程

$$[\widetilde{\nabla}_X V(Y, Z) - \widetilde{\nabla}_Y V(X, Z)]^{\perp} = (\widetilde{R}(\iota_*X, \iota_*Y)\iota_*Z)^{\perp}$$
$$- V(X, \nabla_Y Z) + V(Y, \nabla_X Z) + V([X, Y], Z). \tag{6.4.22}$$

证 (i) 据定理 6.4.1 可知

$$\widetilde{\nabla}_Y \iota_* Z = \iota_*(\nabla_Y Z) + V(Y, Z),$$

因此，$\quad \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y \iota_* Z = \widetilde{\nabla}_X \iota_*(\Delta_Y Z) + \widetilde{\nabla}_X V(Y, Z)$

$$= \iota_* \nabla_X \nabla_Y Z + V(X, \nabla_Y Z) + \tilde{\nabla}_X V(Y, Z).$$

据上式及 (6.1.11) 可知

$$\tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y)\iota_* Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \iota_* Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} \iota_* Z$$
$$= \iota_* \nabla_X \nabla_Y Z + V(X, \nabla_Y Z) + \tilde{\nabla}_X V(Y, Z)$$
$$- \iota_* \nabla_Y \nabla_X Z - V(Y, \nabla_X Z) - \tilde{\nabla}_Y V(X, Z)$$
$$- \iota_* \nabla_{[X,Y]} Z - V([X, Y], Z)$$
$$= \iota_* R(X, Y)Z + \tilde{\nabla}_X V(Y, Z) - \tilde{\nabla}_Y V(X, Z)$$
$$+ V(X, \nabla_Y Z) - V(Y, \nabla_X Z) - V([X, Y], Z),$$

此即

$$\tilde{\nabla}_X V(Y, Z) - \tilde{\nabla}_Y V(X, Z) + V(X, \nabla_Y Z)$$
$$- V(Y, \nabla_X Z) - V([X, Y], Z)$$
$$= \tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y)\iota_* Z - \iota_* R(X, Y)Z. \tag{6.4.23}$$

由于 $V(X, Y) \in \mathfrak{V}_\iota^\perp$, 故有 $V(X, Y)^T = 0$; 又 $\iota_* A \in \mathfrak{V}_\iota^T$ 时, $(\iota_* A)^\perp = 0$, 因此在 (6.4.23) 两边分别取沿 ι 的切分量与垂直分量部分，便得出 Gauss 曲率方程(6.4.19)与 Codazzi 方程 (6.4.22).

此外，应用

$$\langle \iota_* X, \iota_* Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathscr{D}(\mathfrak{M});$$

及当 $A \in \mathfrak{V}_\iota, Z \in \mathscr{D}(\mathfrak{M})$ 时, $\langle A^\perp, \iota_* Z \rangle = 0$, 有

$$\langle A^T, \iota_* Z \rangle = \langle A, \iota_* Z \rangle;$$

由此及由(6.4.19)便得出(6.4.20)与(6.4.21). 定理得证.

在(6.4.23)中取 $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ 便得出

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \tilde{x}^\lambda_{;jk} + \widetilde{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}} \tilde{x}^\mu_{;jk} \tilde{x}^\nu_{;i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{x}^\lambda_{;ik} - \widetilde{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}} \tilde{x}^\mu_{;ik} \tilde{x}^\nu_{;j}$$
$$+ \tilde{x}^\lambda_{;il} \begin{Bmatrix} l \\ kj \end{Bmatrix} - \tilde{x}^\lambda_{;jl} \begin{Bmatrix} l \\ ki \end{Bmatrix}$$
$$= \tilde{R}^\lambda_{\mu\alpha\beta} \tilde{x}^\mu_{;k} \tilde{x}^\alpha_{;i} \tilde{x}^\beta_{;j} - R^l_{kij} \tilde{x}^\lambda_{;l}.$$

若令

$$\tilde{x}^{\lambda}_{;jki} = (\tilde{x}^{\lambda}_{;jk})_{;i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{x}^{\lambda}_{;jk} + \widetilde{\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}}\tilde{x}^{\mu}_{;jk}\tilde{x}^{\nu}_{;i}$$

$$-\begin{Bmatrix}l\\ ji\end{Bmatrix}\tilde{x}^{\lambda}_{;lk} - \begin{Bmatrix}l\\ ki\end{Bmatrix}\tilde{x}^{\lambda}_{;jl},$$

则上式即

$$\tilde{x}^{\lambda}_{;kji} - \tilde{x}^{\lambda}_{;kij} = \tilde{R}^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}\tilde{x}^{\mu}_{;k}\tilde{x}^{\alpha}_{;i}\tilde{x}^{\beta}_{;j} - R^{l}_{kij}\tilde{x}^{\lambda}_{;l}. \qquad (6.4.23)'$$

对任一点 $p\in\mathfrak{M}$，取 $\mathfrak{M}_p^{\perp}$ 的一组伪正交基 $N_1,\cdots,N_{n-m}$，则可写为

$$V(Y,Z) = (\tilde{\nabla}_Y\iota_*Z)^{\perp} = \sum_{\alpha=1}^{n-m}\langle N_\alpha, \tilde{\nabla}_Y\iota_*Z\rangle N_\alpha,$$

因此有 $\tilde{\nabla}_X V(Y,Z) = \sum_{\alpha=1}^{n-m}[X\langle N_\alpha, \tilde{\nabla}_Y\iota_*Z\rangle N_\alpha + \langle N_\alpha, \tilde{\nabla}_Y\iota_*Z\rangle \times \tilde{\nabla}_X N_\alpha]$，故

$$(\tilde{\nabla}_X V(Y,Z))^T = \sum_{\alpha=1}^{n-m}\langle N_\alpha, \tilde{\nabla}_Y\iota_*Z\rangle\iota_*S_{N_\alpha}X.$$

令

$$S_\alpha = S_{N_\alpha},\ \mathfrak{s}_\alpha(X,Y) = \mathfrak{s}_{N_\alpha}(X,Y), \qquad (6.4.24)$$

由于 $\langle N_\alpha, \iota_*Z\rangle = 0$ 及 $\langle A, \iota_*X\rangle = \langle {}^TA, X\rangle$，对所有 $A\in\mathfrak{B}_\iota$，故

$$(\tilde{\nabla}_X V(Y,Z))^T = -\sum_{\alpha=1}^{n-m}\langle\tilde{\nabla}_Y N_\alpha, \iota_*Z\rangle\iota_*S_\alpha X$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n-m}\mathfrak{s}_\alpha(Y,Z)\iota_*S_\alpha X.$$

因此，(6.4.19)—(6.4.21)可写为

$$R(X,Y)Z - {}^T(\tilde{R}(\iota_*X,\iota_*Y)\iota_*Z)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n-m}[\mathfrak{s}_\alpha(Y,Z)S_\alpha X - \mathfrak{s}_\alpha(X,Z)S_\alpha Y], \qquad (6.4.25)$$

$$\langle R(X,Y)W,Z\rangle-\langle\tilde{R}(\iota_*X,\iota_*Y)\iota_*W,\iota_*Z\rangle$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{n-m}[\mathfrak{s}_\alpha(Y,W)\mathfrak{s}_\alpha(X,Z)-\mathfrak{s}_\alpha(X,W)\mathfrak{s}_\alpha(Y,Z)]$$
(6.4.26)

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle-\langle\tilde{R}(\iota_*X,\iota_*Y)\iota_*Y,\iota_*X\rangle$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{n-m}\det\begin{pmatrix}\mathfrak{s}_\alpha(X,X) & \mathfrak{s}_\alpha(X,Y)\\ \mathfrak{s}_\alpha(X,Y) & \mathfrak{s}_\alpha(Y,Y)\end{pmatrix}. \quad (6.4.27)$$

设$\tilde{\mathfrak{M}}$是$m+1$维黎曼流形，$\iota:\mathfrak{M}\to\tilde{\mathfrak{M}}$是安装，$\mathfrak{M}$是$m$维微分流形，则$\mathfrak{M}$称为$\tilde{\mathfrak{M}}$的超曲面. $\mathfrak{M}$也是黎曼流形，具体由$\tilde{\mathfrak{M}}$拉回的度量. $\mathfrak{M}$的单位法向量场只有一个N. 我们以

$$S=S_N,\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_N, \quad (6.4.28)$$

由于 $\langle V(X,Y),N\rangle=\langle\tilde{\nabla}_X\iota_*Y,N\rangle=-\langle\iota_*Y,\tilde{\nabla}_XN\rangle$
$$=-\langle Y,S_NX\rangle$$

故有

$$V(X,Y)=-\langle SX,Y\rangle N. \quad (6.4.29)$$

此时 Gauss 方程可写为

$$\tilde{\nabla}_X\iota_*Y=\iota_*\nabla_XY-\langle SX,Y\rangle N=\iota_*\nabla_XY$$
$$-\mathfrak{s}(X,Y)N, \quad (6.4.30)$$

其中 $X,Y\in\mathscr{D}(\mathfrak{M})$，这里

$$S(X)={}^T(\tilde{\nabla}_XN) \quad (6.4.31)$$

称为 Weigarten 映照. Gauss 曲率方程(6.4.25)化为

$$R(X,Y)Z-{}^T(\tilde{R}(\iota_*X,\iota_*Y)\iota_*Z)$$
$$=\mathfrak{s}(Y,Z)SX-\mathfrak{s}(X,Z)SY. \quad (6.4.32)$$

而(6.4.27)化为

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle-\langle\tilde{R}(\iota_*X,\iota_*Y)\iota_*Y,\iota_*X\rangle$$
$$=\mathfrak{s}(X,X)\mathfrak{s}(Y,Y)-[\mathfrak{s}(X,Y)]^2. \quad (6.4.33)$$

由于$\langle N,N\rangle=1$，故$\langle\tilde{\nabla}_XN,N\rangle=0$，因此$(\tilde{\nabla}_XN)^\perp=0$，即

$\tilde{\nabla}_X N \in \mathfrak{V}_\iota^T$. 由此可知

$$\tilde{\nabla}_X V(Y,Z) = -\tilde{\nabla}_X(\langle SY, Z\rangle N) = -\langle SY, Z\rangle \tilde{\nabla}_X N - \langle \tilde{\nabla}_X \iota_* SY, \iota_* Z\rangle N - \langle \iota_* SY, \tilde{\nabla}_X \iota_* Z\rangle N$$

因此

$$(\tilde{\nabla}_X V(Y, Z) - \tilde{\nabla}_Y V(X,Z))^\perp = -\langle \tilde{\nabla}_X \iota_* SY, \iota_* Z\rangle N - \langle \iota_* SY, \tilde{\nabla}_X \iota_* Z\rangle N + \langle \tilde{\nabla}_Y \iota_* SX, \iota_* Z\rangle N + \langle \iota_* SX, \tilde{\nabla}_Y \iota_* Z\rangle N$$

另一方面

$$V(X,\nabla_Y Z) - V(Y,\nabla_X Z) - V([X,Y],Z) = -\langle SX, \nabla_Y Z\rangle N + \langle SY, \nabla_X Z\rangle N + \langle S[X,Y], Z\rangle N,$$

故 Codazzi 方程化为

$$(\tilde{R}(\iota_* X, \iota_* Y)\iota_* Z)^\perp = \langle \tilde{\nabla}_Y \iota_* SX - \tilde{\nabla}_X \iota_* SY + \iota_* S[X,Y], \iota_* Z\rangle N. \tag{6.4.34}$$

现设 $\tilde{\mathfrak{M}} = R^{m+1}$, R^{m+1} 的坐标为 $(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^{m+1})$, $\tilde{\mathfrak{M}}$的超曲面$\mathfrak{M}$, 其单位法向量 $N = \xi^\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\lambda}$. 微分映照 $\eta: \mathfrak{M} \to S^m$ 是 R^{m+1} 中的 n 维球面，定义为

$$\eta:\ p \longmapsto \xi^\alpha(p),\ p \in \mathfrak{M},$$

这叫 Gauss 映照。于是此映照的函数方阵为

$$\left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i}\right).$$

根据(6.4.3), 如 $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{M}_p$, 则

$$SX = \xi^i \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i} L_\lambda^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

即 Weigarten 映照 SX 由 Gauss 映照的函数方阵所决定.

§ 6.5 黎曼联络

设 $\mathfrak{M}$ 是微分流形具有线性联络 ∇,N_p 是 $p\in\mathfrak{M}$ 的正则邻域,于是任一点 $q\in N_p$,有一在 N_p 中的测地线 τ 使 $\tau(0)=p$,$\tau(t)=q$. 对任一向量 $A\in\mathfrak{M}_p$,令 X 为沿 $\tau(t)$ 的平行移动,适合 $X_{|p}=A$,即 $\nabla_{\dot{\tau}}X=0$,$X_{|\tau(0)}=A$. 显然 X 是 N_p 中可微分向量场. 如果 $A_1,\cdots,A_m\in\mathfrak{M}_p$ 是线性独立的,令 $X_1,\cdots,X_m$ 为沿 $\tau(t)$的平行移动,适合 $X_{j|\tau(0)}=A_j$,则据命题 6.2.5 可知,$X_1,\cdots,X_m$ 是 N_p 中的一组标架。令 $\omega^1,\cdots,\omega^m$ 为对偶的协标架. 由于每一 X_j 适合

$$\nabla_{\dot{\tau}}X_j=0,\quad X_{j|\tau(0)}=A_j,\tag{6.5.1}$$

而 $\tau(t)$为测地线,其切向量 $\dot{\tau}(t)=\tau_*\dfrac{d}{dt}$,适合 $\nabla_{\dot{\tau}}\dot{\tau}=0$. 设 $\dot{\tau}(0)=a^iA_i$,由(6.5.1)可知

$$\nabla_{\dot{\tau}}a^iX_j=0,\quad (a^iX_j)_{|\tau(0)}=a^iA_j.$$

由方程解的唯一性可知

$$\dot{\tau}(t)=(a^iX_j)_{|\tau(t)}.\tag{6.5.2}$$

令 N_0 为 $\mathfrak{M}_p$ 的原点的正则邻域,$N_p=\mathrm{Exp}N_0$. 令 V_0 是点 $(t,a^1,\cdots,a^m)\in R\times R^m$ 的集合,使 $ta^iA_j\in N_0$. 考虑映照 $\Phi:V_0\to N_p$ 由

$$\Phi:(t,a)\to\mathrm{Exp}\,ta^iA_j$$

定义. 令

$$\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k,\nabla_{X_k}X_j=\Gamma_{jk}^iX_i.\tag{6.5.3}$$

我们要证明

$$\Phi^*\omega^i=a^idt+\tilde{\omega}^i,\quad \Phi^*\omega_j^i=\tilde{\omega}_j^i,\tag{6.5.4}$$

其中 $\tilde{\omega}^i$ 与 $\tilde{\omega}_j^i$ 均不包含 dt. 实际上,可令

$$\Phi^*\omega^i = f^i(t,a)dt + \tilde{\omega}^i,$$
$$\Phi^*\omega^i_k = f^i_k(t,a)dt + \tilde{\omega}^i_k,$$
其中 $\tilde{\omega}^i$ 与 $\tilde{\omega}^i_k$ 不包含 dt. 现将 a 固定，而考虑映照 $\tau: t \longmapsto \mathrm{Exp}\, ta^iA_i$，由指数映射的定义知 $\tau(t)$ 是测地线，适合 $\dot{\tau}(0) = a^iA_i$. 显而易见
$$\tau^*\omega^i = f^i(t,a)dt, \quad \tau^*\omega^i_j = f^i_j(t,a)dt.$$
由此可知，$\tau^*\omega^i\left(\frac{d}{dt}\right) = f^i(t,a)$，$\tau^*\omega^i_k\left(\frac{d}{dt}\right) = f^i_k(t,a)$.

另一方面，由于
$$\tau^*\omega^i\left(\frac{d}{dt}\right) = \omega^i\left(\tau_*\frac{d}{dt}\right) = \omega^i(a^kX_k) = a^k\omega^i(X_k) = a^i,$$
故 $f^i(t,a) = a^i$. 又由于
$$\tau^*\omega^i_k\left(\frac{d}{dt}\right) = \omega^i_k\left(\tau_*\frac{d}{dt}\right) = \omega^i_k(a^lX_l) = a^l\Gamma^i_{kl}.$$
另一方面，X_j 是沿 $\tau(t)$ 平移，即沿 $\tau(t)$ 有
$$0 = \nabla_{\dot{\tau}}X_j = \nabla_{a^kX_k}X_j = a^k\Gamma^l_{jk}X_l,$$
所以必有
$$\Gamma^l_{jk}a^k = 0. \tag{6.5.5}$$
由此即知，$f^i_k(t,a) = 0$，这便证明了(6.5.4).

现证明 $\tilde{\omega}^i$ 当 $t = 0$ 时为 0. 实际上，在 V_0 中 $p = (0, a^1, \cdots, a^m)$ 点，
$$\tilde{\omega}^i_{|p}\left(\frac{\partial}{\partial a^k}\right) = \Phi^*\omega^i\left(\frac{\partial}{\partial a^k}\right) = \omega^i\left(\Phi_{*|p}\frac{\partial}{\partial a^k}\right).$$
由于 $\mathrm{Exp}\; ta^iA_i$ 在 $t = 0$ 是常值映照，对任一可微函数 f 有
$$\Phi_{*|p}\frac{\partial}{\partial a^k}f = \left[\frac{\partial}{\partial a^i}(f\circ\Phi)\right]_{t=0} = \frac{\partial}{\partial a^i}(f\circ\Phi)_{t=0} = 0,$$
这就得到了结论. 同理可知，$\tilde{\omega}^i_k$ 在 $t = 0$ 时亦为 0.

对(6.5.4)外微分可知

$$\Phi^* d\omega^i = d\Phi^*\omega^i = da^i_\wedge dt + dt_\wedge \frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial t} + da^k{}_\wedge \frac{\partial \omega^i}{\partial a^k},$$

$$\Phi^* d\omega^i_k = d\Phi^*\omega^i_k = dt_\wedge \frac{\partial \tilde{\omega}^i_k}{\partial t} + da^l_\wedge \frac{\partial \tilde{\omega}^i_k}{\partial a^l}.$$

据结构方程(1.5.18)—(1.5.19)有

$$\Phi^* d\omega^i = \Phi^* \left[-\omega^i_{k\wedge}\omega^k + \frac{1}{2} T^i_{kl}\omega^k{}_\wedge\omega^l \right]$$

$$= dt_\wedge [\tilde{\omega}^i_k a^k + T^i_{kl} a^k \tilde{\omega}^l] + \cdots$$

及 $\Phi^* d\omega^i_k = d\Phi^*\omega^i_k$

$$= \Phi^* \left[-\omega^i_{l\wedge}\omega^l_k + \frac{1}{2} R^i_{krs}\omega^r_\wedge\omega^s \right]$$

$$= dt_\wedge R^i_{krs} a^r \tilde{\omega}^s + \cdots,$$

其中未写出的项不包含 dt，比较 dt 的系数，得

$$\frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial t} = da^i + a^k \tilde{\omega}^i_k + T^i_{kl} a^k \tilde{\omega}^l, \tag{6.5.6}$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}^i_k}{\partial t} = R^i_{krs} a^r \tilde{\omega}^s, \tag{6.5.7}$$

这是结构方程的"极坐标"形式。

现设$\mathfrak{M}$是黎曼流形，∇是黎曼联络。$A_1, \cdots, A_m \in \mathfrak{M}_p$ 适合 $\langle A_j, A_k \rangle = \delta_{jk}$。$X_1, \cdots, X_m$ 是由 p 出发的沿测地线平行移动所得到的 N_p 中的向量场。根据(6.3.4)有

$$X\langle X_j, X_k \rangle = \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle + \langle X_j, \nabla_X X_k \rangle = 0.$$

当X是任一由 p 出发的测地线的切向量，故必须

$$\langle X_j, X_k \rangle = \delta_{jk}. \tag{6.5.8}$$

由此可知

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k = \delta_{jk}\omega^j\omega^k, \tag{6.5.9}$$

其中 $g_{jk} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle$。令

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}, X \in \mathfrak{M}_p. \qquad (6.5.10)$$

用 S_1 表示 $\mathfrak{M}_p$ 中的单位球,即 $\|X\| = 1, X \in \mathfrak{M}_p$. U_0 表示点 $(t, X) \in R \times S_1$ 使 $tX \in N_0$ 的集合. 于是 U_0 是 $R \times S_1$ 的开集, $\Psi = \Phi \circ I$, 其中 I 表 U_0 入 $R \times \mathfrak{M}_p$ 的映照, $\mathfrak{M}_p$ 在选定一组基 $A_1, \cdots, A_m$ 后看作 R^m. 则 $\Psi(t, X) = \mathrm{Exp}\, tX$, 当 $(t, X) \in U_0$. 于是有

引理 6.5.1 $\Psi^* ds^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\omega}^i)^2$.

证 由(6.5.4)可知, $\Psi^* ds^2 = \sum_i [(a^i dt)^2 + (\tilde{\omega}^i)^2 + 2a^i\tilde{\omega}^i dt]$. 应用(6.5.6),注意对黎曼联络 $T^i_{jk} = 0$, 因此有

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i a^i \tilde{\omega}^i = a^i da^i + \sum_{i,j} a^i a^j \tilde{\omega}^i_j.$$

根据(1.4.23), $\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^j_{ik}$, 因此(6.5.3)定义的 $\omega^i_j = -\omega^j_i$, 故 $\sum_{i,j} a^i a^j \tilde{\omega}^i_j = 0$. 因 $a \in S_1$ 时 $I^* \sum (a^i)^2 = 1$, 故 $I^* \sum a^i da^i = 0$ 从而 $I^*\left(\frac{\partial}{\partial t} \sum a^i \tilde{\omega}^i\right) = 0$,即 $I^* \sum a^i \tilde{\omega}^i$ 不包含 t, 但 $t = 0$ 时 $\tilde{\omega}^i = 0$ 故必须 $I^* \sum a^i \tilde{\omega}^i = 0$. 由此可知

$$\Psi^* ds^2 = I^* \circ \Phi^* ds^2 = \sum_i [(a^i dt)^2 + (\tilde{\omega}^i)^2],$$引理得证.

设 $\gamma: J \to \mathfrak{M}, J = [\alpha, \beta] \subset R$ 是一可微分曲线,定义 γ 的弧长为

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \|\dot{\gamma}(t)\| dt. \qquad (6.5.11)$$

显然两曲线除了参数的变换外是相同的则有相同的长度.

引理 6.5.2 设 $\mathfrak{M}$ 是黎曼流形而 $p \in \mathfrak{M}$, 令 N_0 为 $\mathfrak{M}_p$ 的原点的正则邻域而 $N_p = \mathrm{Exp} N_0$. 对每一点 $q \in N_p$ 令 γ_{pq} 为

唯一的 N_p 中由 p 到 q 的测地线，则对 N_p 连 p 与 q 的任一可微分曲线 $\gamma \neq \gamma_{pq}$，有

$$L(\gamma_{pq}) < L(\gamma),$$

特别是当正则邻域 N_0 是 $\mathfrak{M}_p$ 中一超球 $\|X\| < \delta$，则不等式 $L(\gamma_{pq}) < L(\gamma)$ 对任一在 $\mathfrak{M}$ 中联 p 与 q 的曲线 $\gamma \neq \gamma_{pq}$ 成立。

证 设 $\gamma: J \to \mathfrak{M}, J = [0,1]$，是任一 N_p 中连 p 与 q 的曲线。不妨假定 $\gamma(s) \neq p$，当 $s \neq 0$，则我们可写 $\gamma = \Psi \circ \gamma_0$，其中 $\gamma_0: J \to R \times S_1$，并且 γ_0 包含于 N_0 中。$\gamma_0: s \longmapsto (t(s), a(s))(0 \leqslant s \leqslant 1)$，其中 $a = (a^1, \cdots, a^m), a^i a^i = 1$。

$$\dot{\gamma}_0(s) = \gamma_{0*} \frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} + \frac{da^i}{ds}\frac{\partial}{\partial a^i},$$

由引理 6.5.1 知，$a^i \dfrac{da^i}{ds} = 0$。令 $\dot{X}(s) = \dfrac{da^i}{ds}\dfrac{\partial}{\partial a^i}$，

$$\|\dot{\gamma}(s)\| = \|\Psi_* \dot{\gamma}_0(s)\| = (\dot{t}(s))^2 + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{\omega}^i(\dot{X}(s)))^2, \quad (6.5.12)$$

因此

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \geqslant \int_0^1 |\dot{t}(s)| ds = L(\gamma_{pq}), \quad (6.5.13)$$

等式成立仅当 $\tilde{\omega}^i(\dot{X}(s)) = 0$ 对所有 i 及 s。设对正则坐标 $x, \omega^i = A^i_j dx^j$，(A^i_j) 非异，则

$$\Psi^* \omega^i = A^i_j d(t a^j) = A^i_j a^j dt + t A^i_j da^j.$$

这表示 $A^i_j a^j = a^i$，及 $\tilde{\omega}^i = t A^i_j da^j$。由此可知

$$\tilde{\omega}^i(\dot{X}(s)) = t A^i_j \frac{da^j}{ds} = 0,$$

得出 $\dfrac{da^j}{ds} = 0$，换言之 a^j 为常数，因而 $\gamma = \gamma_{pq}$（最多差一参数变换）。

如 N_0 是 $\mathfrak{M}_p$ 中的超球 $\|X\|<\delta$，令 $s\longmapsto\gamma(s)$ 是 $\mathfrak{M}$ 中连 p 与 q 的曲线，而 γ 不全在 N_p。令 X_1 为 N_0 中的点，使 $\mathrm{Exp}X_1=q$。因此有正数 δ_1，使得 $\|X_1\|<\delta_1<\delta$。令

$$N_1=\{\mathrm{Exp}X\mid X\in\mathfrak{M}_p,\|X\|<\delta_1\}.$$

令 s_0 为参数值 s 中使 $\gamma(s)\bar{\in}N_1$ 的最小值，则 $q_0=\gamma(s_0)$ 在 N_1 的边界，因而据第一部分的证明，γ 由 p 到 q_0 的长度

$$\int_0^{s_0}\{(\dot{t}(s))^2+(\tilde{\omega}^i(\dot{X}(s)))^2\}^{\frac{1}{2}}ds\geqslant\int_0^{s_0}\left|\frac{dt}{ds}\right|ds=L(\gamma_{pq_0})$$

$$=\int_0^{\delta_1}dt=\delta_1>\|X_1\|=L(\gamma_{pq}).\quad\text{引理得证。}$$

在连通的黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 中任两点 p,q，能以一曲线相连。定义 p,q 两点的距离为

$$\rho(p,q)=\inf_{\gamma}L(\gamma),\tag{6.5.14}$$

其中 γ 过所有连 p 与 q 的可微分曲线．则容易证明

（i）$\rho(p,q)=\rho(q,p)$;

（ii）$\rho(p,q)\leqslant\rho(p,r)+\rho(r,q)$;

（iii）$\rho(p,q)=0$ 当且仅当 $p=q$.

令 $\quad B_r(p)=\{q\in\mathfrak{M}\mid\rho(q,p)<r\}$,

$\quad\quad S_r(p)=\{q\in\mathfrak{M}\mid\rho(q,p)=r\}$,

其中 $0\leqslant r\leqslant\infty$．$B_r(p)$ 称为以 p 为中心，r 为半径的**开球**，而 $S_r(p)$ 称为**球面**．由引理 6.5.2 可知，如 $q\in N_p$，γ_{pq} 为正则邻域中联 p 与 q 的测地线，则 $L(\gamma_{pq})\geqslant\rho(p,q)=\inf L(\gamma)\geqslant L(\gamma_{pq})$ 故有 $\rho(p,q)=L(\gamma_{pq})$.

命题 6.5.3 设开球 $V_r(0)=\{X\in\mathfrak{M}_p\mid\|X\|<r\}$ 是 $\mathfrak{M}_p$ 的原点的正则邻域，则 $B_r(p)=\mathrm{Exp}V_r(0)$.

证 显然，$\mathrm{Exp}V_r(0)\subset B_r(p)$．另一方面，如 $q\in B_r(p)$，但 $q\bar{\in}\mathrm{Exp}V_r(0)$，则任一连 p,q 的曲线必与 $\mathrm{Exp}V_{r_1}(0)$ 的边界相交 $(r_1<r)$，由引理 6.5.2 可知，$\rho(p,q)>r_1$ 对任一

$r_1 < r$，因此有 $\rho(p, q) \geqslant r$，这是矛盾的，故 $B_r(p) = \mathrm{Exp}V_r(0)$。

在命题 6.5.3 的假定下，$B_r(p)$ 与 $V_r(0)$ 分别称为$\mathfrak{M}$中 p 点与 $\mathfrak{M}_p$ 中原点的**正则球邻域**.

由此命题可知，由距离函数 ρ 定义的$\mathfrak{M}$的拓扑与原来的拓扑等价. 即 $B_r(p), p \in \mathfrak{M}, r > 0$ 是 $\mathfrak{M}$ 的邻域基本系.

引理 6.5.4 (Gauss 引理) 设 $B_{r_0}(p)$ 是正则球邻域，则对任意正数 $r < r_0$，$S_r(p)$ 是 $\mathfrak{M}_p$ 中球面 $\|X\| = r$ 的指数映照 Exp 下的像，则任一由 p 出发的测地线在与 $S_r(p)$ 的第一个交点与 $S_r(p)$ 正交.

证 由于 $V_r(0) \subset V_{r_0}(0)$，故 $V_r(0)$ 是 $\mathfrak{M}_p$ 的原点的正则球邻域. 据命题 6.5.3，$B_r(p) = \mathrm{Exp}V_r(0)$. 微分同胚 Exp 必定把 $V_r(0)$ 的边界一一映为 $S_r(p)$($B_r(p)$ 的边界). 设 γ 是由 p 出发的测地线，以弧长为参数，X 是 γ 在 p 点的单位切向量，则有 $\|X\| = 1$. 并且 γ 与 $S_r(p)$ 的第一个交点的线段为 $\gamma(s) = \mathrm{Exp}\, sX, 0 \leqslant s \leqslant r$. 令 Y 为 $S_r(p)$ 的在 $\gamma(r)$ 点的任一切向量，$Y = \xi^i \left.\dfrac{\partial}{\partial a^i}\right|_{\gamma(r)}$，$\xi^i\xi^i = 1$. 由引理 6.5.1 可知

$$\left\langle \gamma_* \frac{d}{ds}, Y \right\rangle = \left\langle \Psi_* \frac{d}{ds}, \Psi_* Y \right\rangle = 0,$$

引理得证.

引理 6.5.5 设 $\mathfrak{M}$ 是黎曼流形，ρ 为(6.5.14)定义的距离函数，设 p 与 q 为$\mathfrak{M}$中任两点，而 γ_{pq} 为$\mathfrak{M}$中连 p, q 的可微分曲线，若 $L(\gamma_{pq}) = \rho(p, q)$，则 γ_{pq} 是测地线.

证 据定理 6.2.2，存在 γ 上有限个点 $p_0 = p, p_1, \cdots, p_n = q$ 使得曲线段 $\gamma_{p_{\alpha-1}p_\alpha}$ 落在正则球邻域 $B_{r_\alpha}(p_{\alpha-1})$ 中，则

$$\sum_{\alpha=1}^{n} L(\gamma_{p_{\alpha-1}p_\alpha}) = L(\gamma_{pq}), \quad \rho(p, q) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} \rho(p_{\alpha-1}, p_\alpha),$$

据引理 6.5.2，若有一 $\gamma_{p_{\alpha-1}p_\alpha}$ 不是测地线，则 $\rho(p_{\alpha-1},p_\alpha)<L(\gamma_{p_{\alpha-1}p_\alpha})$，因而 $\rho(p,q)<L(\gamma_{pq})$，得到矛盾.

定理 6.5.6 设 $\mathfrak{M}$ 是黎曼流形，ρ 是距离函数，对每一点 $p\in\mathfrak{M}$，有一正数 r_p，使得任意正数 $r\leqslant r_p$，$B_r(p)$ 具有以下性质：

(i) $B_r(p)$ 是它的每一点的正则邻域.

(ii) 任两点 $a,b\in B_r(p)$，令 γ_{ab} 是 $B_r(p)$ 中连 a 与 b 的唯一测地线，则 γ_{ab} 是 $\mathfrak{M}$ 中唯一的连 a,b 的曲线使其长度为 $\rho(a,b)$.

证 设 $A_1,\cdots,A_m$ 是 $\mathfrak{M}_p$ 的一组基. 令 $x^1,\cdots,x^m$ 是 p 点的对这组基的正则坐标系，在一 p 的坐标邻域 U 中成立. 令 η 为充分小的正数，令

$$B_\eta(p)=\{q\in U\,\big|\,|x(q)|<\eta\}.$$

由引理 6.2.4 知存在正数 δ_1，使当 $\eta\leqslant\delta_1$ 时，$B_\eta(p)$ 是它的每一点的正则邻域. 我们取 $r_p=\dfrac{1}{4}\delta_1$，则当 $0<r\leqslant r_p$ 时，显然 $B_r(p)$ 有性质(i). 我们要证明它亦有性质(ii). 实际上，当然 γ_{ab} 也是 $B_{\delta_1}(p)$ 中唯一的测地线连 a,b. 另一方面，如有一曲线连结 a 与 b 而不完全在 $B_{\delta_1}(p)$，其长度显然大于 $3r$. 由于

$$L(\gamma_{ab})=\rho(a,b)\leqslant\rho(a,p)+\rho(p,b)\leqslant 2r,$$

故此曲线不可能等于 $\rho(a,b)$. 证完.

§ 6.6 完备的黎曼流形

设 $\mathfrak{M}$ 是一微分流形具有线性联络∇. $\mathfrak{M}$ 称为**完备的**，若任一测地线 $\gamma_X(t)$ 的参数可伸展到无穷，即对 $-\infty<t<+\infty$，$\gamma_X(t)$ 仍是测地线.

如$\mathfrak{M}$是黎曼流形可引进距离 $\rho(a,b)$，则完备性有三个等价定义，即

定理 6.6.1 设$\mathfrak{M}$是黎曼流形，则下面三条件等价：

(i) $\mathfrak{M}$ 中任一 Cauchy 点串 $\{p_n\}$（即任意 $\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $n,n'>N$ 有 $\rho(p_n,p_{n'})<\varepsilon$）是收敛的；

(ii) $\mathfrak{M}$ 中任一有界闭集是紧的；

(iii) $\mathfrak{M}$ 是完备的.

此外，完备的连通黎曼流形有如下的一重要性质.

定理 6.6.2 在一完备的连通黎曼流形中，任两点 p,q 可以用一测地线相连，其长度恰为 $\rho(a,b)$.

由测地线微分方程解的存在性与唯一性可知

引理 6.6.3 黎曼流形的每一点 p_0 有一正则球邻域 $B_r(p_0)$，使其中任两点 p 与 q 有唯一的测地线 γ 连 p,q. 令 $L(\gamma)$是 γ 的长度. Y,Z分别是在 p 与 q 的 γ 的单位切向量，则

(i) 当(p_1,Y_1)充分接近 (p,Y)，Y_1 是 $\mathfrak{M}_{p_1}$ 的单位向量，则在 $B_r(p_0)$ 中存在由 p_1 出发的以 Y_1 为切向量的测地线，使得其长度等于 $L(\gamma)$.

(ii) (q,Z)可微分地依赖于 p,Y，及 $L(\gamma)$.

引理 6.6.4 设 $p\in\mathfrak{M}$，$\gamma_n:J_n\to\mathfrak{M}$是一串由 p 点出发的、在此点切向量为 X_n 的测地线，以弧长为参数. 若 $X_n\to X\in\mathfrak{M}_p$，则 $\gamma_X(0)=p$. 若 $t_0\in J$ 是 $t_0=\lim\limits_{n\to\infty}t_n$，$t_n\in J_n$，则 $\gamma_X(t_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(t_n)$.

实则上，线段 $\gamma_X(t)$，$0\leqslant t\leqslant t_0$ 能分割为有限多个线段，每一段包含于一正则球邻域 B_λ 中 $(\lambda=1,\cdots,n)$，每一 B_λ 有引理 6.6.3 的性质，于是引理 6.6.4 可重复应用引理 6.6.3 得到.

现在一起证明定理 6.6.1 与 6.6.2.

(i) ⇒ (iii) 设 $\gamma_X(t)(t\in J)$是一$\mathfrak{M}$中最大测地线，是以

弧长 t 为参数，即不能伸展到 J 之外。若 t_0 是开区间 J 的一个端点，例如是右端，则可取一串 $t_n\in J$ 及 $\lim t_n=t_0$。因此 $\gamma_X(t_n)$是 $\mathfrak{M}$ 中的 Cauchy 串，收敛于一点 $p_0\in\mathfrak{M}$. 显然，这与 t_n 的选取无关. 令 $B_r(p_0)$为 p_0 的正则球邻域，而 x 是正则坐标系。命 $J_1=\{t\in J\mid\gamma_X(t)\in B_r(p_0)\}$，$x^i(t)=x^i(\gamma_X(t))$，$x^i(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}x^i(t)$. 由于

$$\ddot{x}^i(t)+\Gamma^i_{kl}\dot{x}^k(t)\dot{x}^l(t)=0, \qquad (6.6.1)$$

其中 $\dot{x}^i=\dfrac{dx^i}{dt}$ 对 $t\in J_1$，注意 $\dot{x}^i\dot{x}^i=1$，故 $\ddot{x}(t)$ 是有界的，因此当 $t\to t_0$ 时，由中值定理

$$\frac{\dot{x}^i(t)-\dot{x}^i(t_0)}{t-t'}=\ddot{x}^i(t_0+\theta(t-t_0)),$$

$$0\leqslant\theta\leqslant1$$

可知左导数 $\dot{x}^i(t_0)$ 存在，且

$$\dot{x}^i(t_0)=\lim_{t\to t_0}\dot{x}^i(t). \qquad (6.6.2)$$

同理可证，$\dot{x}^i(t)$ 在 t_0 的左导数 $\ddot{x}^i(t_0)$ 存在，且

$$\ddot{x}^i(t_0)=\lim_{t\to t_0}\ddot{x}^i(t). \qquad (6.6.3)$$

在 $\mathfrak{M}_{p_0}$ 中的向量 $Z=\dot{x}^i(t_0)\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p_0}$ 的长度仍为 1，因此可作测地线 $\gamma_Z(t)$，当 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$. 映照 $t\longmapsto\Gamma(t)$ 定义为

$$\Gamma(t)=\begin{cases}\gamma_X(t), & t\in J,\\ \gamma_Z(t), & t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon.\end{cases}$$

当 $t\in J$ 及 $t_0<t<t_0+\varepsilon$ 都满足(6.6.1)。此外，对于 t_0 其右导数满足(6.6.1)，而由(6.6.2)，(6.6.3)左导数亦满足(6.6.1)，因此 $\Gamma(t)$ 是一测地线，这与 $\gamma_X(t)$，$t\in J$ 的极大性相矛盾。

(ii)⇒(i) 设 p_n 是 $\mathfrak{M}$ 中一 Cauchy 串，则 p_n 是有界

的，因而是紧的，有一 p_n 的子串收敛，因而 p_n 收敛。

现在证明，如果条件 (iii) 成立，则定理 6.6.2 成立。

任意 $r \geqslant 0$，令 $\bar{B}_r(p)$ 表开球 $B_r(p)$ 的闭包，命 E_r 表 $\bar{B}_r$ 的点 q 使得能有一测地线与 p 相联且其长度为 $\rho(p,q)$，我们只需证明

$$E_r = \overline{B_r(p)}, \quad 对所有\ r \geqslant 0. \tag{6.6.4}$$

据引理 6.6.4，E_r 是紧的. (6.6.4)在 $r=0$ 成立，并且(6.6.4)如对 $r=r_0>0$ 时成立，则对 $r<r_0$ 亦成立；反之，(6.6.4)如对 $r<r_0$ 时成立，对 $r=r_0$ 亦成立。因此仅需证明，若(6.6.4)对 $r=R$ 时成立，则对 $r=R+\varepsilon$ 时亦成立即可。

由 $E_R=\overline{B_R(p)}$ 的紧致性可知，存在有限多个点 $p_1,\cdots,p_n$ 及正数 $r_1,\cdots,r_n$ 使 $B_{r_\alpha}(p_\alpha)(\alpha=1,\cdots,n)$ 盖过 E_R，并且 $B_{2r_\alpha}(p_\alpha)$是相对紧的正则球邻域. 由于 $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} B_{r_\alpha}(p_\alpha)$ 是相对紧的，它的补集任一点与 p 有最短距离大于 R，于是存在正数 $\varepsilon<\min\{r_1,\cdots r_n\}$ 使 $\bar{B}_{R+\varepsilon}(p)\subset \sum\limits_{\alpha=1}^{n} B_{r_\alpha}(p_\alpha)$.

设 q 是$\mathfrak{M}$的任一点使 $R<\rho(p,q)\leqslant R+\varepsilon$，令 a 是球面 $S_R(p)$ 的点与 q 有最短距离. 由于任一连 p 与 q 的曲线必与 $S_R(p)$ 相交，故

$$\rho(p,a)+\rho(a,q)=\rho(p,q).$$

因此，$\rho(a,q)=\rho(q,p)-\rho(p,a)\leqslant R+\varepsilon-R=\varepsilon$，这表示 q 与 a 包含于同一球邻域 $B_{2r_\alpha}(p_\alpha)$ 之中. a 与 q 可以一测地线相连，其长度为 $\rho(a,q)$. 这证明(6.6.4)对一切 r 成立，因而定理 6.6.2 成立。

现证(iii) ⇒ (ii). 设 S 是$\mathfrak{M}$的一有界闭集. 即 S 包含在一球 $\overline{B_r(p)}$ 中，后者上面已证明是紧的，因此闭子集 S 也是

紧的。

注意在证明 (iii) ⇒ (ii) 中只用到一个固定点 p.

我们称一黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 对一点 p 是完备的，如指数映照 Exp_p 是把 $\mathfrak{M}_p$ 映为整个 $\mathfrak{M}$ 的微分映照.则一点 p 的完备性隐含$\mathfrak{M}$的完备性.

注意一黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 称为**实解析的**，如 $\mathfrak{M}$ 是一实解析流形，对任两个在开集 $U\subset\mathfrak{M}$ 的实解析向量场 $X, Y, \langle X, Y\rangle$ 是 U 中实解析的.

命题 6.6.5 设$\mathfrak{M}$是完备的黎曼流形，则对任一点 $p\in\mathfrak{M}$，指数映射 Exp_p 是把 $\mathfrak{M}_p$ 映满为$\mathfrak{M}$的微分映照.若$\mathfrak{M}$是实解析黎曼流形，则 Exp_p 是实解析映照.

证 引理 6.6.4 保证 Exp_p 的连续性. 由于 Exp_p 在整个 $\mathfrak{M}_p$ 有定义，可微分性由引理 6.6.3 可知道. 如果 $\mathfrak{M}$ 是实解析黎曼流形，则测地线方程之解也是实解析的，而引理 6.6.3 的"可微分"性能换为"实解析"性.

在黎曼流形的一测地线 $\gamma_X(t)$, $0\leqslant t<\infty$，称为**射线**，如果它的任意两点之间的长度等于此两点的距离，$\gamma(0)$ 称为此射线的**始点**.

命题 6.6.6 设$\mathfrak{M}$是完备的非紧黎曼流形，则任一点 p 必有一射线以 p 为始点.

证 据定理 6.6.1，$\mathfrak{M}$ 必非有界. 令 p_n 为$\mathfrak{M}$中的一点串使 $\rho(p, p_n)\to\infty$，命 γ_n 为联 p 与 p_n 的测地线其长度为 $\rho(p, p_n)$. 我们以弧长为参数，以 X_n 表 γ_n 在 p 点的单位切向量. 无妨假定 $X_n\to X$，否则取子串代之，则 $\gamma_X(t)$ 是以 p 为始点的射线. 实际上，取 $t_0>0$，则必有正整数 N，使 $\rho(p, p_n)>t_0$，当 $n\geqslant N$，由引理 6.6.4 可知，

$$\lim_{\substack{n\to\alpha\\ n\geqslant N}}\gamma_n(t_0)=\gamma_X(t_0),$$

因此有

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \rho(p, \gamma_n(t_0)) = \rho(p, \gamma_X(t_0)).$$

另一方面，$t_0=\rho(p,\ \gamma_n(t_0))$ 当 $n\geq N$，因此 $t_0=\rho(p, \gamma_X(t_0))$，由此可知，当 $0\leq t_1\leq t_0$ 时，$\rho(\gamma_X(t_1),\gamma_X(t_0))\geq t_0-t_1$. 但另一方面，$\rho(\gamma_X(t_1),\ \gamma_X(t_0))\leq \gamma_X$ 的由 $\gamma_X(t_1)$ 到 $\gamma_X(t_0)$的弧长 t_0-t_1，因此 $\rho(\gamma_X(t_1),\gamma_X(t_0))=t_0-t_1$，证完.

§6.7 等度变换

设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 是两伪黎曼流形，微分映照 $\varphi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 称为**等度变换**，如果 φ 是一微分同胚，并且 $\langle X,Y\rangle=\langle\varphi_*X,\varphi_*Y\rangle$，对任何 $X, Y\in\mathfrak{M}_p$. φ 称为局部等度变换，如任一点 p 有一邻域 U 及 $\varphi(p)$ 的邻域 V，使得 φ 限制在 U 时是等度变换.

显然，如 φ 是 $\mathfrak{M}$ 到自己的等度变换，则距离不变，即 $\rho(p, q)=\rho(\varphi(p),\varphi(q))$，对所有 $p,q\in\mathfrak{M}$. 反之，有

定理 6.7.1 设 φ 是映黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 为自己的微分映照保持距离不变，则 φ 是等度变换.

首先需要证明如下的两个命题.

命题 6.7.2 设 $\mathfrak{M}$ 是黎曼流形，任一点 $p_0\in\mathfrak{M}$，必有一坐标邻域 U，使得其中过任两点 p 与 q 的测地线 $\gamma_X(t)$，以弧长为参数时，适合

$$\text{(i)}\quad \frac{dx^j}{dt}=g^{jk}(x)\frac{\partial\rho(p,q)}{\partial x^k},\quad x=x(q);$$

$$\text{(ii)}\quad g^{jk}(x)\frac{\partial\rho^2(p,q)}{\partial x^j}\frac{\partial\rho^2(p,q)}{\partial x^k}=4\rho^2(p,q),$$

其中 $g_{jk}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle$，$x(q)$是 U 的坐标系，$x(q)=\gamma_X(t)$，

证 我们取 U 为正则球邻域 $B_\varepsilon(p_0)$ 使得 $B_{4\varepsilon}(p_0)$ 仍然是正则邻域. 由于 $p,q\in B_\varepsilon(p_0)$, $\rho(p,q)<2\varepsilon$. 当 p 固定, 球面 $\rho(p,q)=\text{Const}$ 落在 $B_{4\varepsilon}(p_0)$ 之中. 此球面在 q 点的法向量为 $g^{ik}\dfrac{\partial\rho(p,q)}{\partial x^k}$. 另一方面,据 Gauss 引理, $\gamma_X(t)$ 在 q 的切向量 $\dfrac{dx^i}{dt}$ 与球面垂直,即有

$$\frac{dx^i}{dt}=\chi g^{ik}\frac{\partial\rho(p,q)}{\partial x^k},$$

其中 χ 是一比例常数. 但 $\dfrac{dx^i}{dt}$ 是单位向量, 故

$$1=g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}=\chi^2g^{ik}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\partial\rho}{\partial x^k}$$

$$=\chi\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}=\chi\frac{d\rho}{dt}=\chi,$$

因为 γ_X 以参数为弧长, $t=\rho(p,q)$. 由此可知, $\chi=1$, 即 (i)成立,并且

$$1=g^{ik}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\partial\rho}{\partial x^k}.$$

两边乘以 $4\rho^2$ 即便可得到 (ii).

命题 6.7.3 在上一命题的假设下,有

(i) $\rho^2(p,q)=g_{ik}(x(p))(x^i(q)-x^i(p))(x^k(q)-x^k(p))+o(|x(p)-x(q)|^2)$,

(ii) 命 $p=\text{Exp}A, q=\text{Exp}B$,则

$$\lim_{\substack{p\to p_0\\ q\to p_0}}\frac{\|A-B\|}{\rho(p,q)}=1.$$

证 由于 $\rho(p,p)=0$, 即 $\rho^2(p,q)>0$ 在 $p=q$ 为真

正的极小，故当 $x^i = x^i(q)$ 有 $\left.\frac{\partial \rho^2(p,q)}{\partial x^k}\right|_{q=p} = 0$，因此，当 $p \in B_\varepsilon(p_0)$ 固定时，$\rho^2(p,q)$ 有 Taylor 展式

$$\rho^2(p,q) = A_{jk}(x(p))(x^j(q) - x^j(p))(x^k(q) - x^k(p)) + o(|x(p) - x(q)|^2),$$

并必须 (A_{jk}) 是定正的．由上命题 (ii) 可知

$$4\frac{\partial^2 \rho^2(p,q)}{\partial x^k \partial x^l} = 2g^{ji}\frac{\partial^2 \rho^2(p,q)}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial^2 \rho(p,q)}{\partial x^l \partial x^i} + \cdots,$$

其中没有写出来的项皆在 $q = p$ 时为 0．命 $q = p$，我们有

$$A_{il} = A_{ij}g^{jk}A_{kl}.$$

由此可知，必须 $A_{il} = g_{il}(x(p))$，这证明 (i)，而 (ii) 是 (i) 的显然推论．命题得证．

现在来证明定理 6.7.1．命 p, q 是 $\mathfrak{M}$ 中任两点，据假设 $\rho(p,q) = \rho(\varphi(p), \varphi(q))$．当 q 充分接近 p 时，据命题 6.7.3 (i) 有

$$\left.\frac{\partial' \rho^2(p,q)}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{q=p} = 2g_{jk}(x(p)).$$

令 $\varphi(p)$ 的坐标邻域为 V，坐标系为 y，则

$$\frac{\partial \rho^2(p,q)}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \rho^2(\varphi(p),\varphi(q))}{\partial y^i \partial y^l}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^k} + \frac{\partial \rho^2(\varphi(p),\varphi(q))}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^k}.$$

由此可知

$$g_{jk}(x(p)) = g_{il}(y(\varphi(p)))\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^k},$$

故 φ 必定是局部等度变换．此外，φ 必定是一一的，如果不然，有 $\varphi(p) = \varphi(q), p \neq q$，则 $0 = \rho(\varphi(p), \varphi(q)) = \rho(p,q) > 0$，矛盾，因此 φ 是等度变换，定理得证明．

注意，若 $\varphi:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ 是等度变换，$\varphi(p)=q$，则 φ 把 p 点的正则球邻域映为 q 点的正则球邻域，若用正则坐标表示，$y^i=\varphi^i(x)$，则此变换保持欧氏距离不变，即 $y^iy^i=x^ix^i$，故必须是线性正交变换 $y^i=a^i_kx^k$.

引理 6.7.4 设 $\mathfrak{M}$ 是连通的黎曼流形，φ 与 ψ 是两映 $\mathfrak{M}$ 为自己的等度变换，若有一点 $p\in\mathfrak{M}$ 使

$$\varphi(p)=\psi(p),\varphi_{*|p}=\psi_{*|p},$$

则 $\varphi=\psi$.

证 由于 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是等度变换，我们只需证，如 $\varphi(p)=p$ 及 $\varphi_{*|p}=I$ 时，φ 是恒同映照即可. 显然，在 p 的任一正则邻域中，φ 是恒同，由于任一点 $q\in\mathfrak{M}$ 可以用一曲线与 p 相连，我们能以有限个正则邻域盖过曲线，由此即知 $\varphi(q)=q$，引理得证明.

设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 是黎曼流形，U_1 与 U_2 是 $\mathfrak{M}$ 中连通区域，φ_1,φ_2 是分别映 U_1,U_2 为 $\mathfrak{N}$ 的连通区域的等度变换，由引理 6.7.4 可知，如有一点 $p\in U_1\cap U_2$ 使 $\varphi_1(p)=\varphi_2(p)$ 及 $\varphi_{1*|p}=\varphi_{2*|p}$，则 φ_1 与 φ_2 在 $U_1\cap U_2$ 包含 p 的连通域中有 $\varphi_1=\varphi_2$. 等度变换 φ_1 及 φ_2 称为互相**直接展拓**，如 $U_1\cap U_2\neq\phi$，而且在 $U_1\cap U_2$ 中，$\varphi_1=\varphi_2$.

设 φ 是区域 $U\subset\mathfrak{M}$ 映为 $\mathfrak{N}$ 的一区域的等度变换，$\gamma(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的一连续曲线，$\gamma(0)\in U$. 等度变换 φ 称为**沿 γ 可展拓**，若对每一 t 有一包含 $\gamma(t)$ 的区域 U_t 及一映 U_t 为 $\mathfrak{N}$ 的区域的等度变换 φ_t 使得 $\varphi_0=\varphi$ 在 $U_0=U$，并且当 $|t_1-t|$ 充分小时，φ_{t_1} 与 φ_t 是直接展拓. φ_t，$0\leqslant t\leqslant 1$ 称为 φ 沿 γ 的**展拓**. 由此可知，$\varphi_t(\gamma(t))$ 连续的依赖于 t. 设 $\psi_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 φ 的另一沿 γ 的展拓，V_t 是 ψ_t 的定义域. 不难证明，t 的集合使得 $\varphi_t(\gamma(t))=\psi_t(\gamma(t))$ 及 $\varphi_{t*|\gamma(t)}=\psi_{t*|\gamma(t)}$ 是单位区间中的开集，同时也是闭集，并且包含 $t=0$，

因此，对任一 t，φ_t 与 ψ_t 在包含 $\gamma(t)$ 的 $U_t \cap V_t$ 的连通域中是重合的. 我们可以粗略地说，这类似于全纯函数的解析展拓：一等度量变换沿一曲线的展拓是唯一的，假如可能的话.

命题 6.7.5 设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$ 是实解析的、完备的黎曼流形，φ 是 $\mathfrak{M}$ 的区域 U 映为 $\mathfrak{N}$ 的区域的等度变换，设 $\gamma(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的连续曲线，$\gamma(0) \in U$，则 φ 是沿 γ 可展拓的.

证 设 $p \in \mathfrak{M}$，$q \in \mathfrak{N}$. 设 $B_{r_0}(p)$，$B_{r_0}(q)$ 是 p 与 q 的正则球邻域. 设 $r < r_0$，ψ 是 $B_r(p)$ 到 $B_r(q)$ 的等度变换使 $q = \psi(p)$. 我们可以断言，ψ 可拓广到映 $B_{r_0}(p)$ 为 $B_{r_0}(q)$ 的等度变换. 实际上，我们可取 $B_{r_0}(p)$ 与 $B_{r_0}(q)$ 的正则坐标 x 与 y，由于在 $B_r(p)$ 中

$$g_{jk}(x) = \tilde{g}_{il}(y) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial y^l}{\partial x^k}, \tag{6.7.1}$$

又由于映照的正则坐标表示是把球 $|x| < r$ 映为球 $|y| < r$ 的等度映照，原点固定不动，y 与 x 的关系必然是线性的正交变换，因此可以扩充到 $|x| < r_0$，因而 ψ 是映 $B_{r_0}(p) \to B_{r_0}(q)$ 的实解析映照，而(6.7.1)在 $B_{r_0}(p)$ 成立.

不失普遍性可假定 $\gamma(t)$ 是可微分的，以弧长为参数，命 s_0 为参数 s 的上确界，使得存在 φ 的沿曲线 $\gamma(t)$，$0 \leqslant t < s_0$ 的展拓 φ_t. 令 $p_t = \gamma(t)$ 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 及 $q_t = \varphi_t(p_t)$ 当 $0 \leqslant t < s_0$. 由完备性的假设可知，存在极限 $q_0 = \lim\limits_{t \to s_0} \varphi_t(p_t)$. 选 ε 充分小，使得 $B_{3\varepsilon}(p_{s_0})$ 及 $B_{3\varepsilon}(q_0)$ 是正则球邻域. 又选取 s_1 使得 $p_t \in B_\varepsilon(p_{s_0})$，$q_t \in B_\varepsilon(q_0)$，当 $s_1 \leqslant t < s_0$. 由于 $B_{2\varepsilon}(p_{s_1})$ 与 $B_{2\varepsilon}(q_{s_1})$ 是 p_{s_1} 及 q_{s_1} 的正则邻域，如上面可证，φ_{s_1} 能拓广为 $B_{2\varepsilon}(p_{s_1})$ 到 $B_{2\varepsilon}(q_{s_1})$ 的等度变换，因而必须 $s_0 = 1$，故 φ 可延 γ 展拓，命题得证.

曲线 $\gamma(t)$ 与 $\gamma_1(t)$($0 \leqslant t \leqslant 1$) 称为在 $\mathfrak{M}$ **同伦**. 若 $\gamma(0) = \gamma_1(0)$，$\gamma(1) = \gamma_1(1)$，并且存在连续的映照 $\alpha: Q \to \mathfrak{M}$，其

中 $Q=\{(s,t)\in R^2|0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 使得 $\alpha(0,t)=\gamma(t)$ 及 $\alpha(1,t)=\gamma_1(t)$ 及 $\alpha(s,0)=\gamma(0),\alpha(s,1)=\gamma(1)$.

定理 6.7.6 在命题 6.7.5 的假定下，设 $\gamma_1(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是连续的曲线同伦于γ. 命 φ_t 与 $\psi_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 分别是φ沿 γ 与 γ_1 的展拓，则 φ_1 与 ψ_1 在 $\gamma(1)=\gamma_1(1)$ 的一邻域重合.

证 由于γ与 γ_1 是同伦，存在连续映照 $\alpha:Q\to\mathfrak{M}$，Q 为闭单位正方形，使

$$\alpha(0,t)=\gamma(t),\alpha(1,t)=\gamma_1(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$\alpha(s,0)=\gamma(0),\alpha(s,1)=\gamma(1).$$

对固定的 s，命 α^s 表连续的曲线 $t\longmapsto\alpha(s,t)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 命 $\varphi_t^s(0\leqslant t\leqslant 1)$ 表φ沿 α^s 的展拓. 命σ为 s_0 的上确界，s_0 是使得所有 $s,0\leqslant s\leqslant s_0,\varphi_1^s$ 与φ_1在 $\gamma(1)$的一邻域重合. 现在考虑连续曲线 α^σ. 映照 $t\longmapsto\varphi_t^\sigma(\alpha^\sigma(t))$ 是连续的曲线，因此存在正数 r 使得对每一 t，$0\leqslant t\leqslant 1$，球 $B_{2r}(\alpha^\sigma(t))$ 与 $B_{2r}(\varphi_t^\sigma(\alpha^\sigma(t)))$ 是正则球邻域. 存在正数 ε 使得 $\rho(\alpha^\sigma(t),\alpha^s(t))<r$，当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 及当 $|\sigma-s|<\varepsilon$. 对每一如此的 s,φ_t^s 有一 φ 的沿 α^s 的展拓. 由于等度变换沿一曲线的展拓是唯一的，当$|s-\sigma|<\varepsilon$ 时等度变换 φ_1^σ 与 φ_1^s 在 $\gamma(1)$ 的一邻域重合，这证明了第一，必须 $\sigma=1$，其次如 $0\leqslant s\leqslant 1$，φ_1^1 与 φ_1^s 在 $\gamma(1)$ 的一邻域重合，定理得证.

参 考 文 献

[1] D. Gromoll, W. Klingenberg, M. Meyers, Riemannsche Geometrie im grossen, Berlin, Springer (1968).

[2] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, N. Y., Academic Press (1962).

[3] F. J. Murray and K. S. Miller, Existence theorems for Ordinary equations, New York Univ. Press (1954).

第七章 测地线的指数和比较定理

§7.1 测地线的变分

设$\mathfrak{M}$是m维黎曼流形，∇是黎曼联络。设 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是可微分曲线，J是R中0点的开区间，c的**变分**是一可微分映照$V:[\alpha,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$ 使得 $V(t,0)=c(t)$. V称为**真**变分，如果有 $V(\alpha,\varepsilon)=c(\alpha)$，及 $V(\beta,\varepsilon)=c(\beta)$，对任一 $\varepsilon\in J$.

令 $V_\varepsilon:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 表变分V的c的邻近曲线，定义为

$$V_\varepsilon(t)=V(t,\varepsilon). \text{ 令 } L:J\to R, \text{ 对 } \varepsilon\in J$$

$$\varepsilon\longmapsto L(\varepsilon)=\int_\alpha^\beta\|\dot V_\varepsilon(t)\|dt,$$

其中 $\|\dot V_\varepsilon\|=[\langle\dot V_\varepsilon(t),\dot V_\varepsilon(t)\rangle]^{\frac{1}{2}}$，$\dot V_\varepsilon(t)$ 是曲线 V_ε 的切向量。$\mathfrak{M}$上的测地线c称为**正则的**，如$c(\alpha)$至$c(t)$的弧长为$t-\alpha$。如 $V:[\alpha,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$是$c$的变分，令 $D_1=\dfrac{\partial}{\partial t}$，$D_2=\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$ 表V的(t,ε)点的切空间的自然基。

定理 7.1.1 设 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 为正则测地线，$V:[\alpha,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$是$c$的变分。令 $X=V_*D_1$，$Y=V_*D_2$；令 $\widetilde{Y}=Y-\langle Y,X\rangle X$，则有

$$L'(0)=\frac{dL}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\langle Y,X\rangle_{|t,0}\Big|_\alpha^\beta, \qquad (7.1.1)$$

$$L''(0)=\int_\alpha^\beta(\langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y},\nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle-\langle R(Y,X)X,Y\rangle)_{|t,0}dt + \langle\nabla_{D_2}Y,X\rangle_{|t,0}\Big|_\alpha^\beta. \qquad (7.1.2)$$

当 V 是真变分时，

$$L'(0)=0 \tag{7.1.3}$$

$$L''(0)=\int_\alpha^\beta(\langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y},\nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle-\langle R(Y,X)X,Y\rangle)_{|t,0}dt \tag{7.1.4}$$

证 由于

$$L(\varepsilon)=\int_\alpha^\beta\|X(t,\varepsilon)\|dt \text{ 及 } \|X(t,0)\|=\|\dot{c}(t)\|=1,$$

又由于 $\|X\|$ 是连续而 $[\alpha,\beta]$ 是紧的，在 J 中存在 0 点的邻域 J_0，使得 $\|X\|$ 在 $[\alpha,\beta]\times J_0$ 不为零，因此

$$L'(\varepsilon)=\int_\alpha^\beta\frac{D_2\langle X,X\rangle_{|t,\varepsilon}}{2\|X(t,\varepsilon)\|}dt=\int_\alpha^\beta\frac{\langle\nabla_{D_2}X,X\rangle_{|t,\varepsilon}}{\|X(t,\varepsilon)\|}dt.$$

由于 $[D_1,D_2]=0$ 及 ∇ 是无挠的，我们有

$$\nabla_{D_1}V_*D_2=\nabla_{D_2}V_*D_1, \tag{7.1.5}$$

因而得

$$L'(\varepsilon)=\int_\alpha^\beta\frac{\langle\nabla_{D_1}Y,X\rangle_{|t,\varepsilon}}{\|X(t,\varepsilon)\|}dt. \tag{7.1.6}$$

由于 $c(t)=V(t,0)$ 是正则测地线，$\nabla_{D_1}X_{|t,0}=\nabla_{D_1}\dot{c}=0$，及

$$D_1\langle Y,X\rangle=\langle\nabla_{D_1}Y,X\rangle+\langle Y,\nabla_{D_1}X\rangle,$$

得出

$$L'(0)=\int_\alpha^\beta\frac{D_1\langle Y,X\rangle_{|t,0}}{\|\dot{c}\|}dt=\langle Y,X\rangle_{|t,0}\Big|_\alpha^\beta,$$

这证明了(7.1.1).

由于

$$D_2\frac{\langle\nabla_{D_1}X,Y\rangle}{\|X\|}=\frac{\langle\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}Y,X\rangle+\langle\nabla_{D_1}Y,\nabla_{D_2}X\rangle}{\|X\|}$$
$$-\frac{\langle\nabla_{D_1}Y,X\rangle^2}{\|X\|^3}=\frac{\langle\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}Y,X\rangle+\langle\nabla_{D_1}Y,\nabla_{D_1}Y\rangle}{\|X\|}$$
$$-\frac{\langle\nabla_{D_1}Y,X\rangle^2}{\|X\|^3}$$

及 $\nabla_{D_1}(\langle Y, X\rangle X)_{|t,0} = D_1\langle Y, X\rangle X_{|t,0} + \langle Y, X\rangle\nabla_{D_1}X_{|t,0}$

$$= D_1\langle Y, X\rangle X_{|t,0},$$

而由 $\langle\widetilde{Y}, X\rangle_{|t,0} = 0$ 可知

$$\langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, X\rangle_{|t,0} = D_1\langle\widetilde{Y}, X\rangle_{|t,0} = 0,$$

故有

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{D_1}Y, \nabla_{D_1}Y\rangle_{|t,0} &= \langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, \nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle_{|t,0} \\ &\quad + 2\langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, \nabla_{D_1}\langle Y, X\rangle X\rangle_{|t,0} \\ &\quad + \langle\nabla_{D_1}\langle Y, X\rangle X, \nabla_{D_1}\langle Y, X\rangle X\rangle_{|t,0} \\ &= \langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, \nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle_{|t,0} + 2D_1\langle Y, X\rangle\langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, X\rangle_{|t,0} \\ &\quad + (D_1\langle Y, X\rangle)^2\langle X, X\rangle_{|t,0} \\ &= \langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, \nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle_{|t,0} + \langle\nabla_{D_1}Y, X\rangle^2_{|t,0}.\end{aligned}$$

由此及(7.1.6)可知

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}Y, X\rangle + \langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, \nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle)_{|t,0}dt.$$

据曲率张量定义

$$R(X, Y)Y = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}Y - \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}Y$$

及 $\langle\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}Y, X\rangle_{|t,0} = D_1\langle\nabla_{D_2}Y, X\rangle_{|t,0}$, 故得出

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle\nabla_{D_1}\widetilde{Y}, \nabla_{D_1}\widetilde{Y}\rangle - \langle R(X, Y)Y, X\rangle)_{|t,0}dt + \langle\nabla_{D_2}Y, X\rangle_{|t,0}\Big|_\alpha^\beta,$$

这证明了(7.1.2).

当 V 为真的变分，有 $V(\alpha,\varepsilon) = c(\alpha)$及 $V(\beta,\varepsilon) = c(\beta)$,

故 $Y(\alpha, \varepsilon) = V_* D_{2|\alpha,\varepsilon} = 0$, $Y(\beta, \varepsilon) = 0$,

从而 $\nabla_{D_2}Y_{|\alpha,\varepsilon} = \nabla_{D_2}Y_{|\beta,\varepsilon} = 0$,

这得出(7.1.3)及(7.1.4)，定理得证.

现令 I 代表区间$[\alpha,\beta]$. 设 $c: I \to \mathfrak{M}$ 是可微分曲线. 逐段光滑可微分曲线 $Y: I \to T\mathfrak{M}$ 适合 $\pi\circ Y = c$ 称为沿 c **逐段光滑向量场**.

设 $c: I \to \mathfrak{M}$ 是可微分曲线，J 是 R 的 0 点的开区间，连

续映照 $V: I\times J\to\mathfrak{M}$ 称为 c 的**逐段变分**,如果有一分割 $\alpha=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_l=\beta$, 使得对每一 $I_\nu=[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]$, $\nu=1,\cdots,l$ 映照 $V|_{I_\nu\times J}$ 是曲线 $c|_{I_\nu}$ 的变分. 邻近的曲线 $V_\varepsilon: I\to\mathfrak{M}$ 是逐段可微分. $V_{|I_\nu\times J}$ 的长度函数 $L_\nu: J\to R$ 在 J 的 0 点邻域是可微分的, 因而 V 的长度函数 $L=\sum_{\nu=1}^{l}L_\nu$ 在 0 点的邻域可微分. 对于 $t\in I_\nu$, 由

$$V_*D_{2|t,\varepsilon}=(V_{|I_\nu\times J})_*D_{2|t,\varepsilon}$$

定义的映照 $V_*D_2: I\times J\to T\mathfrak{M}$ 是连续的,因为

$$V_{|I_\nu\times J}(\gamma_\nu,\varepsilon)=V_{|I_{\nu+1}\times J}(\gamma_\nu,\varepsilon),\ \nu=1,\cdots,l-1,$$

故 $Y: I\to T\mathfrak{M}$, $Y(t)=V_*D_{2|t,0}$ 是沿 c 的逐段光滑向量场. 令

$$X_\nu=(V_{|I_\nu\times J})_*D_1,\quad Y_\nu=(V_{|I_\nu\times J})_*D_2,$$

$$\tilde{Y}_\nu=Y_\nu-\langle Y_\nu,X_\nu\rangle X_\nu.$$

据(7.1.1)与(7.1.2),当 c 是正则测地线时,有

$$L'(0)=\sum_{\nu=1}^{l}\langle Y_\nu,X_\nu\rangle_{|t,0}\Big|_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu},$$

$$L''(0)=\sum_{\nu=1}^{l}\Big(\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu}(\langle\nabla_{D_1}\tilde{Y}_\nu,\nabla_{D_1}\tilde{Y}_\nu\rangle$$

$$-\langle R(Y_\nu,X_\nu)X_\nu,Y_\nu\rangle)_{|t,0}dt+\langle\nabla_{D_2}Y_\nu,X_\nu\rangle_{|t,0}\Big|_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu}\Big).$$

定义 $$Y_\perp=Y-\langle Y,\dot{c}\rangle\dot{c},$$

则 $$\nabla_{D_1}\tilde{Y}_{\nu|t,0}=Y_\perp'(t)=\nabla_{D_1}Y_\perp(t),\ t\in[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu].$$

由于 $X_{\nu|t,0}=\dot{c}$ 可微分而 $V_*D_2: I\times J\to T\mathfrak{M}$ 连续,有

$$Y_{\nu|\gamma_\nu,\varepsilon}=Y_{\nu+1|\gamma_\nu,\varepsilon},\quad \nabla_{D_2}Y_{\nu|\gamma_\nu,\varepsilon}=\nabla_{D_2}Y_{\nu+1|\gamma_\nu,\varepsilon},$$

我们得出

$$L'(0)=\langle Y,\dot{c}\rangle\Big|_\alpha^\beta,\tag{7.1.7}$$

$$L''(0)=\int_\alpha^\beta(\langle Y'_\perp, Y'_\perp\rangle-\langle R(Y,\dot c)\dot c, Y\rangle_{|t})dt$$
$$+\langle\nabla_{D_2}Y_{1|\beta,0}, \dot c(\beta)\rangle-\langle\nabla_{D_2}Y_{1|\alpha,0}, \dot c(\alpha)\rangle. \quad (7.1.8)$$

如果 V 是真的，有 $Y(\alpha)=Y(\beta)=0$，$\nabla_{D_2}Y_{1|\alpha,0}=0$，$\nabla_{D_2}Y_{1|\beta,0}=0$，此时上两式化为 (7.1.3) 与 (7.1.4)，即此两式对 c 是逐段光滑的变分 V 亦成立．由黎曼曲率张量的性质可知

$$\langle R(\dot c, \dot c)\dot c, Y\rangle=0, \quad \langle R(Y, \dot c)\dot c, \dot c\rangle=0,$$

故有

$$L'(0)=0, \quad (7.1.9)$$

$$L''(0)=\int_\alpha^\beta(\langle Y'_\perp, Y'_\perp\rangle-\langle R(Y_\perp, \dot c)\dot c, Y_\perp\rangle)_{|t,0}dt. \quad (7.1.10)$$

这里应指出的是，沿一可微分曲线 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 的任一逐段光滑的向量场，可以由一沿 c 的逐段变分得到．实际上，对每一 $t\in[\alpha,\beta]$ 作一由 $c(t)$ 出发的测地线以 $Y(t)$ 为方向，由于 $[\alpha,\beta]$ 是紧而 Y 连续，我们能找到 R 的 0 点的开区间 J，使得 $\varepsilon Y(t)$ 在指数映照 Exp 的定义域中．当 $(t,\varepsilon)\in[\alpha,\beta]\times J$，以

$$V(t, \varepsilon)=\mathrm{Exp}_{c(t)}(\varepsilon Y(t)) \quad (7.1.11)$$

定义 $V:[\alpha,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$，则 V 是一沿 c 的逐段变分，而有 $V_*D_{2|t,0}=Y(t)$．

§7.2 Jacobi 场；测地线的共轭点

设 $c:J\to\mathfrak{M}$ 是一可微分曲线，Y 是沿 c 的向量场，令 $Y'=\nabla_DY$，$D=\dfrac{d}{dt}$．

若 c 为正则测地线，则沿 c 的 Jacobi 场 Y 即适合下面微

分方程的向量场

$$Y'' + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0. \qquad (7.2.1)$$

令 $\mathscr{J}_c$ 为沿着 c 的 Jacobi 场的集合，这成一实的线性空间，对任一 $\alpha \in R$，则 $\alpha\dot{c}$ 是一 Jacobi 场，因为 $\nabla_D \dot{c} = 0$ 及 $R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$. 若 $X, Y \in \mathscr{J}_c$，则由

$$D(\langle X', Y\rangle - \langle Y', X\rangle) = \langle X'', Y\rangle - \langle Y'', X\rangle$$
$$= -\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, Y\rangle + \langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, X\rangle = 0,$$

这表示 $\langle X', Y\rangle - \langle X, Y'\rangle$ 必然是常数，特别当 $X = \dot{c}$ 时，$\langle Y', \dot{c}\rangle$ 是常数. 由于 $D\langle Y, \dot{c}\rangle = \langle Y', \dot{c}\rangle$，故若有 $\alpha, \beta \in J$，使 $\langle Y, \dot{c}\rangle_{|\alpha} = 0$ 及 $\langle Y', \dot{c}\rangle_{|\beta} = 0$，则 $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$，或者若有 $\langle Y, \dot{c}\rangle_{|\alpha} = \langle Y, \dot{c}\rangle_{|\beta} = 0$ 亦有 $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$. 不论如何 $\langle Y, \dot{c}\rangle$ 是 t 的线性函数.

方程 (7.2.1) 称为 Jacobi 方程，这是二阶的线性常微分方程组. 因为对任一点 $c(t)$ 可取 $\mathfrak{M}$ 的图 $\{U, x\}$. 令

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \dot{c} = \dot{x}^j X_j, \quad Y = \varphi^j X_j,$$

$$\nabla_{X_j} X_k = \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} X_i, \quad R(Y, \dot{c})\dot{c} = \varphi^k \dot{x}^j \dot{x}^l R^i_{jkl} X_i.$$

于是

$$Y' = \nabla_D Y = \left\{\frac{d\varphi^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \dot{x}^j \varphi^k\right\} X_i,$$

特别是 $$\nabla_D \dot{c} = \left(\frac{d\dot{x}^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \dot{x}^j \dot{x}^k\right) X_i = 0,$$

故有

$$Y'' = \nabla_D Y' = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \dot{x}^j \varphi^k\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\varphi^p}{dt} + \begin{Bmatrix} p \\ kj \end{Bmatrix} \dot{x}^j \varphi^k\right) \begin{Bmatrix} i \\ pl \end{Bmatrix} \dot{x}^l\right] X_i$$

$$= \left[\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} + 2\left\{ {i \atop jk} \right\} \dot{x}^j \frac{d\varphi^k}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {i \atop jk} \right\} + \left\{ {p \atop kj} \right\}\left\{ {i \atop pl} \right\}\right)\dot{x}^j\dot{x}^l\varphi^k\right]X_i.$$

据(1.3.10)可知

$$Y'' = \left[\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} + 2\left\{ {i \atop jk} \right\} \dot{x}^j \frac{d\varphi^k}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {i \atop jl} \right\} + \left\{ {i \atop kp} \right\}\left\{ {p \atop jl} \right\} - R^i_{jkl}\right)\dot{x}^j\dot{x}^l\varphi^k\right]X_i,$$

因此 Jacobi 方程(7.2.1)的局部坐标可表达为

$$\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} + 2\left\{ {i \atop jk} \right\} \dot{x}^j \frac{d\varphi^k}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {i \atop jl} \right\} + \left\{ {i \atop kp} \right\}\left\{ {p \atop jl} \right\}\right)\dot{x}^j\dot{x}^l\varphi^k = 0, \quad (7.2.2)$$

这显然是 φ^k 的二阶线性常微分方程组. 由常微分方程的理论得知，对 $t_0 \in J$, u, $w \in \mathfrak{M}_{c(t_0)}$ 存在唯一的沿 c 的 Jacobi 场满足

$$Y(t_0) = u, \quad Y'(t_0) = w,$$

因而沿 c 的所有 Jacobi 场成一 $2n$ 维实线性空间.

命题 7.2.1 设 $V:[\alpha,\beta] \times J \to \mathfrak{M}$ 是沿曲线 $c:[\alpha,\beta] \to \mathfrak{M}$ 的变分，并且 c 的每一个相邻的曲线 $V_\varepsilon(t) = V(t,\varepsilon):[\alpha,\beta] \to \mathfrak{M}$ 是正则测地线，则变分向量场 $Y(t) = V_* D_{2|t,0}$ 是沿 c 的 Jacobi 场.

证 由于 $V_\varepsilon(t)$ 是正则测地线，由于 $[D_1, D_2] = 0$ 及(1.6.7), (7.1.5)有

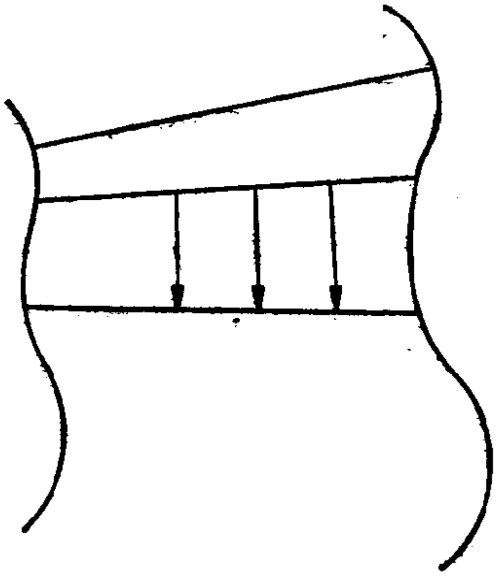
$$0 = \nabla_{D_2}\nabla_{D_1}V_*D_1 = \nabla_{D_1}\nabla_{D_2}V_*D_1 + R(V_*D_2, V_*D_1)V_*D_1$$
$$= \nabla_{D_1}\nabla_{D_1}V_*D_2 + R(V_*D_2, V_*D_1)V_*D_1.$$

特别取 $\varepsilon = 0$, 上式即

$$Y'' + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0,$$

命题得证.

由此命题可知，获得 Jacobi 场的一个方法是测地线作移动，并且任一沿测地线的 Jacobi 场皆可由此法得到，即



命题 7.2.2 沿测地线 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 的任一 Jacobi 场皆可由 c 的通过测地线的变分得到.

证 选 $c(\alpha)$ 的一邻域 U 使得 U 的任两点能以唯一的极小的测地线相连. 设 $c(t)\in U$，当 $\alpha\leqslant t\leqslant\delta$，我们首先构造一沿 $c|_{[\alpha,\delta]}$ 的 Jacobi 场 Y 使其在 $t=\alpha$ 与 $t=\delta$ 具有任意的给定的值. 选取曲线 $a:J\to U$ 使得 $a(0)=c(\alpha)$ 及 $a'=a_*\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_0$ 等于 $\mathfrak{M}_{c(\alpha)}$ 中已与的向量. 同样，选取曲线 $b:J\to U$ 使得 $b(0)=c(\delta)$ 而 $b'=b_*\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_0$ 是 $\mathfrak{M}_{c(\delta)}$ 中已与的向量. 定义变分 $V(t,\varepsilon):[\alpha,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$ 为 $V_\varepsilon(t):[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是 U 中通过 $a(\varepsilon)$ 与 $b(\varepsilon)$ 中唯一的测地线. 则据上面的命题，$Y=V_*D_{2|t,0}$ 是一 Jacobi 场在端点有已与的值.

现证任一沿 $c_{|[\alpha,\delta]}$ 的 Jacobi 场皆可由此法得出. 令 $\mathscr{J}_c$ 是沿 c 的所有 Jacobi 场，则

$$w\longmapsto(w(\alpha),w(\delta))$$

定义了一线性映照 $\psi:\mathscr{J}_c\to\mathfrak{M}_{c(\alpha)}\times\mathfrak{M}_{c(\delta)}$. 上面证明此映照是映满，由于此两线性空间皆是 $2m$ 维，由此可知 ψ 是同构的，换言之，一 Jacobi 场由它的在 $c(\alpha)$ 与 $c(\delta)$ 的值唯一

确定. 因此上面的构造得出所有沿测地线 $c_{|[\alpha,\delta]}$ 的 Jacobi 场.

这里把 $V_\varepsilon(t)$ 限制在区间 $[\alpha, \delta]$ 不是主要的. 由 $[\alpha, \beta]$ 的紧致性可知, 可取 R 的 0 点的间隔 J 充分小, 使得 $V_\varepsilon(t)$ 能在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 定义, 即 $V:[\alpha, \beta]\times J\to\mathfrak{M}$ 是沿 c 的通过测地线的逐段变分, 使得已给的 Jacobi 场是变分向量, 命题得证.

基于此命题, Synge[5] 称 Jacobi 场方程为测地线偏离方程, 这在引力波的研究中有应用(见 Weber[6]).

现在研究 Jacobi 场与指数映照的关系. 任一 m 维实的线性空间 E 有一自然的微分结构, 它的图就是向量空间的同构 $E\to R^m$, E 作为微分流形, 对任一 $v\in E$ 有一切空间 E_v. 我们作标准的同构

$$\mathscr{T}_v: E\to E_v$$

如下: 对每一 $w\in E$, 考虑直线 $\lambda(t)=v+tw$ 而令 $\mathscr{T}_v w=\lambda_* D_{|0}$, 其中 $D=\dfrac{d}{dt}$. 如 $x: E\to R^m$ 是坐标系, 则 $\mathscr{T}_v w\in E_v$,

$$\mathscr{T}_v w=\frac{d}{dt}(x^i(v)+tx^i(w))\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_v=x^i(w)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_v. \tag{7.2.3}$$

引理 7.2.3 设 $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是测地线. $p=c(0)$, v, $w\in\mathfrak{M}_p$, $v=\dot{c}(0)$, $c(t)=\operatorname{Exp}(tv)$, 对任一 $u\in\mathfrak{M}_p$, 令 $\mathscr{T}_u:\mathfrak{M}_p\to(\mathfrak{M}_p)_u$ 为标准同构, 则映照 $Y:[0,\beta]\to T\mathfrak{M}$,

$$Y(t)=\operatorname{Exp}_{p*}t\mathscr{T}_{tv}w \tag{7.2.4}$$

是沿 c 的 Jacobi 场适合 $Y(0)=0$ 及 $Y'(0)=w$.

证 取 R 中 0 点的充分小间隔 J, 考虑 c 的变分 $V:[0,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$, 定义为

$$V(t,\varepsilon)=\operatorname{Exp}(t(v+\varepsilon w)).$$

据命题 7.2.1, $Y(t)=V_* D_{2|t,0}$ 是沿 c 的 Jacobi 向量场, 但

由上式可知

$$V_*D_2 = \mathrm{Exp}_*\mathscr{T}_{t(v+\varepsilon w)}tw,$$

因此 $V_*D_{2|t,0} = \mathrm{Exp}_*t\mathscr{T}_{tv}w = Y(t)$，特别是 $Y(0) = 0$，而

$$Y'(0) = \nabla_{D_1}Y(t)_{|0} = \nabla_{D_1}V_*D_{2|0,0} = \nabla_{D_2}V_*D_{1|0,0} = w,$$

引理得证.

设 $c:J\to\mathfrak{M}$ 是测地线，我们称 J 中 t_0 与 t_1 对于 c **共轭**，若有一沿 c 的不恒为 0 的 Jacobi 场 Y 使 $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$. 在命题 7.2.2 的证明中知道，若 t_0 与 t_1 是不相同并且 $c(t_0)$ 与 $c(t_1)$ 在一充分小邻域中，则对于 c 非共轭，因为给与 $v\in\mathfrak{M}_{c(t_0)}$，$w\in\mathfrak{M}_{c(t_1)}$，沿 c 存在唯一的 Jacobi 场 Y 适合 $Y(0) = v$，$Y(t_1) = w$，即 $\psi:\mathscr{J}_c\to\mathfrak{M}_{c(t_0)}\times\mathfrak{M}_{c(t_1)}$ 适合 $\psi Y = (Y(t_0), Y(t_1))$ 是同构，故适合 $\psi Y = (0, 0)$ 的 Y 必然恒为 0 . 有时我们简称 $t_1\in J$ 为 c 的**共轭点**，如 $J = [\alpha, \beta]$，$t_0 = \alpha$，而 t_0，t_1 对于 c 共轭.

定理 7.2.4 设 $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 为正则测地线，

$$p = c(0),\ t_1\in(0, \beta],\ u = t_1\dot{c}(0)\in\mathfrak{M}_p.$$

令 $\mathscr{J}_c^{t_1}$ 为沿 c 的 Jacobi 向量场适合 $Y(0) = Y(t_1) = 0$ 形成的向量空间，Λ_p^u 为 Exp_{p*} 在 u 的零空间，即 $(\mathfrak{M}_p)_u$ 的向量 b 适合 $\mathrm{Exp}_{p*}b = 0$ 形成的子空间，则有

$$\dim\mathscr{J}_c^{t_1} = \dim\Lambda_p^u. \tag{7.2.5}$$

证 由标准同构 $\mathscr{T}_u:\mathfrak{M}_p\to(\mathfrak{M}_p)_u$ 定义一线性映照 $\varphi:\mathscr{J}_c^{t_1}\to\Lambda_p^u$ 使 $\varphi Y = \mathscr{T}_uY'(0)$. 据引理 7.2.3

$$0 = Y(t_1) = \mathrm{Exp}_{p*}t_1\mathscr{T}_uY'(0),$$

即 $\mathscr{T}_uY'(0)\in\Lambda_p^u$，因为 $t_1\neq 0$. φ 是内射，而据 Jacobi 场的唯一性知 φ 是满射. 因为当 $b\in\Lambda_p^u$，沿 c 的 Jacobi 场 Y 适合 $Y(0) = 0$ 及 $Y'(0) = \mathscr{T}_u^{-1}b$ 是唯一决定，而 $Y(t_1) = \mathrm{Exp}_{p*}t_1b = t_1\mathrm{Exp}_{p*}b = 0$，故 $Y\in\mathscr{J}_c^{t_1}$，而显然的 $\varphi Y = b$，因此 φ 是同构，(7.2.5)证明.

设 $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是测地线适合 $p=c(0)$, $v=\dot{c}(0)$. 于是有 $c(t)=\mathrm{Exp}(tv)$，据上定理可知，$t_1\in(0,\beta]$ 为 c 的共轭点仅当指数映照 Exp_p 在 $u=t_1v$ 之秩非最大的，即 u 非常点。我们已知在 $\mathfrak{M}_p$ 的 0 点的一邻域，Exp_p 有最大的秩，因此有一正数 μ 使得任一由 p 出发的正则测地线 $[0,\mu]\to\mathfrak{M}$ 是没有共轭点的. 特别是任一沿 c 的不恒等于 0 的 Jacobi 场最多有有限个零点，否则由 $[0,\beta]$ 的紧致性可知必有零点的聚点 $\bar{t}$ 使 $Y(\bar{t})=0$，这与前面所述应用于 $c(\bar{t})$ 时矛盾，故 c 最多有有限个共轭点，即任一由 $\mathfrak{M}_p$ 的 0 点出发的射线上 Exp_p 的非常点是孤立的.

若 t_1 是 c 的共轭点，我们称 $\dim\mathscr{I}_c^{t_1}=\dim\Lambda_p^u(\leqslant m-1)$ 为 t_1 **的重数.**

§7.3 Gauss 引理的推广

设$\mathfrak{M}$是黎曼流形，据定义有一定正的对称的张量场 g，称为基本张量. 令 $T\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{M}$ 的切丛(见§6.1). 自然的投影为 $\pi:T\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$. 给与 $\mathfrak{M}$ 的线性联络 ∇，令$\mathscr{K}$为联络映照 $\mathscr{K}:TT\mathfrak{M}\to T\mathfrak{M}$. 对 $u\in T\mathfrak{M}$, $A,B\in(T\mathfrak{M})_u$, 定义 $T\mathfrak{M}$ 在 u 的基本张量 $\tilde{g}$ 为

$$\tilde{g}_u(A,B)=g_{\pi(u)}(\pi_*A,\pi_*B)+g_{\pi(u)}(\mathscr{K}A,\mathscr{K}B).\tag{7.3.1}$$

如A是水平的，即 $\mathscr{K}A=0$; B是垂直的，即 $\pi_*B=0$，则 $\tilde{g}(A,B)=0$; 这表示 $(T\mathfrak{M})_u$ 中的水平与垂直的向量对于 $\tilde{g}$ 是正交的. 我们要证 $\tilde{g}$ 是正定的，实际上设

$$u=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad A=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+a^{m+i}\frac{\partial}{\partial\xi^i},$$

$$B=b^i\frac{\partial}{\partial x^i}+b^{m+i}\frac{\partial}{\partial\xi^i},$$

据(6.1.5)有

$$g_{\pi(u)}(\pi_* A, \pi_* B) + g_{\pi(u)}(\mathscr{K} A, \mathscr{K} B)$$
$$= g_{jk}a^j b^k + g_{jk}(a^{m+j} + a^s\xi^r\Gamma^j_{rs})$$
$$\times (b^{m+k} + b^q\xi^p\Gamma^k_{pq})$$
$$= a\begin{pmatrix} I & (\xi^r\Gamma^j_{rs}) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & (\xi^r\Gamma^j_{rs}) \\ 0 & I \end{pmatrix}' b',$$

其中 $a = (a^1, \cdots, a^{2m})$, $b = (b^1, \cdots, b^{2m})$, Γ^j_{rs} 为线性联络，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^l_{kj} \frac{\partial}{\partial x^l}$.

任一点 $p \in \mathfrak{M}$，考虑自然的安装 $\iota: \mathfrak{M}_p \to T\mathfrak{M}$，对 $u \in \mathfrak{M}_p$，及 $a, b \in (\mathfrak{M}_p)_u$，定义内积

$$\langle a, b\rangle_{|u} = \tilde{g}_{\pi(u)}(\iota_* a, \iota_* b).$$

若 $u = u^j \frac{\partial}{\partial x^j}_{|p}$， $a = a^j \frac{\partial}{\partial u^j}_{|u}$， 则 $\iota_* a = a^j \frac{\partial}{\partial u^j}$， 故

$\pi_*(\iota_* a) = 0$， $\mathscr{K} \iota_* a = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}_{|p} = \mathscr{T}_u^{-1} a$， 因此有

$$\langle a, b\rangle_{|u} = g_p(\mathscr{T}_u^{-1} a, \mathscr{T}_u^{-1} b). \tag{7.3.2}$$

这样在 $\mathfrak{M}_p$ 中定义了一标准的基本张量 $\langle , \rangle$。实际上，上式即

$$\langle a, b\rangle_{|u} = g_{jk}(x(p)) a^j b^k. \tag{7.3.3}$$

引理 7.3.1 设 $p \in \mathfrak{M}$，$v \in \mathfrak{M}_p$ 在 Exp_p 的定义域中，$\varphi: [0, 1] \to \mathfrak{M}_p$ 是一直线段 $\varphi(t) = tv$，$\langle , \rangle$ 为 $\mathfrak{M}_p$ 中的标准基本张量，则对任两 $a, b \in (\mathfrak{M}_p)_v$，当 $a = \dot{\varphi}(1)$ 时有

$$\langle a, b\rangle = \langle \mathrm{Exp}_{p*} a, \mathrm{Exp}_{p*} b\rangle. \tag{7.3.4}$$

上式即映照 Exp_p 是“径向等度”的，即 $\mathfrak{M}_p$ 在 v 的切向量对于由 0 出发通过 v 的射线的分量经 Exp_{p*} 是保持长度不变的. 特别是，若 $\mathfrak{M}_p$ 中的微分曲线 ψ 与 φ 正交于 v，则 $\mathrm{Exp}\circ\psi$ 与测地线 $\mathrm{Exp}\circ\varphi$ 正交，故此引理是局部的 Gauss 引理(引理

6.5.4)的推广.

证 令 $\mathscr{T}_v:\mathfrak{M}_p\to(\mathfrak{M}_p)_v$ 是标准同构. Y 是沿测地线 $c=\mathrm{Exp}\circ\varphi$ 的 Jacobi 场适合 $Y(0)=0, Y'(0)=w=\mathscr{T}_v^{-1}b$. 据(7.2.4)

$$Y(1)=\mathrm{Exp}_{p*}\mathscr{T}_v w=\mathrm{Exp}_{p*}b, \tag{7.3.5}$$

由于 $D\langle Y,\dot{c}\rangle=\langle Y',\dot{c}\rangle$ 是常数, $\langle Y,\dot{c}\rangle$ 是 t 的线性函数. 由于 $Y(0)=0$, 故 $\langle Y,\ \dot{c}\rangle_{|t}=t\langle Y',\ \dot{c}\rangle_{|0}=t\langle w,\ v\rangle$ 因此 $\langle Y,\dot{c}\rangle_{|1}=\langle w,v\rangle$. 由于 $\dot{c}(1)=\mathrm{Exp}_{p*}a$, 故由(7.3.5)可知 $\langle v,\ w\rangle=\langle\mathrm{Exp}_{p*}a,\ \mathrm{Exp}_{p*}b\rangle$. 另一方面, 据标准基本张量的定义

$$\langle v,w\rangle=\langle\mathscr{T}_v v,\mathscr{T}_v w\rangle=\langle a,b\rangle.$$

引理得证.

引理 7.3.2 任一逐段可微分曲线 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 可有一严格单调增加的可微分映照 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ 使得 $\tilde{c}=c\circ\varphi$ 是可微分的.

证 把 $[\alpha,\beta]$ 剖分为 $\alpha=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_l=\beta$, 使得 $c_\nu=[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的可微分曲线. 我们构造一在 c_ν 严格单调增的可微分映照 $\varphi_\nu:[\alpha,\beta]\to R$ 使得

$$\varphi_\nu(t)=0\ 当\ t\leqslant\gamma_{\nu-1},\varphi_\nu(t)=1\ 当\ t\geqslant\gamma_\nu.$$

令 $\varphi(t)=\gamma_0+\sum\limits_{\nu=1}^{l}(\gamma_\nu-\gamma_{\nu-1})\varphi_\nu(t)$, 于是

$$\varphi(\gamma_\nu)=\gamma_\nu,\quad \nu=0,1,\cdots,l.$$

而 $D^r\varphi(\gamma_\nu)=0$ 当 $\nu=0,1,\cdots,l$ 及 $r\geqslant1$. 令 $\tilde{c}=c\circ\varphi$, 设 x 是 $\tilde{c}(\gamma_\nu)$ 的 $\mathfrak{M}$ 中一邻域的坐标系, 函数

$$x^i\circ\tilde{c}=x^i\circ c\circ\varphi,\ i=1,\cdots,m$$

的任一阶左微分与右微分在 γ_ν 皆为零, 因此 $\tilde{c}$ 是可微分曲线, 引理得证.

引理 7.3.3 设 $p\in\mathfrak{M}_p$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_p$ 是 Exp_p 的定义域, $v\in\widetilde{\mathfrak{M}}_p$.

设 $\varphi:[0,1]\to\widetilde{\mathfrak{M}}_p$ 是过 0 与 v 的直线段，即 $\varphi(t)=tv$. $\psi:[0,1]\to\widetilde{\mathfrak{M}}_p$ 是逐段可微分曲线适合 $\psi(0)=0,\psi(1)=v$. 恒有

$$L(\operatorname{Exp}\circ\psi)\geqslant L(\operatorname{Exp}\circ\varphi). \tag{7.3.6}$$

更精确地说：若有一 $t_0\in(0,t]$，使得 $\dot\psi(t_0)$ 的正交于径向量的分量 b_0，使得 $\operatorname{Exp}_{p*}b_0$ 不为零，则有

$$L(\operatorname{Exp}\circ\psi)>L(\operatorname{Exp}\circ\varphi), \tag{7.3.7}$$

此即由 0 到 v 的曲线中，直线最短的性质在 Exp_p 下保持不变.

证 据引理 7.3.2 不妨假定 ψ 是可微分的. 又设 $v\neq 0$ 及 $\psi(t)\neq 0$ 当 $t\in(0,1]$.

对 $t\in(0,1]$，令 $a=\mathscr{T}_{\psi(t)}\dfrac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}$，而写 $\dot\psi(t)=\langle\dot\psi(t),b\rangle b+\langle\dot\psi(t),a\rangle a$，$b$ 是与 a 是正交的单位向量. 由于

$$\|\dot{\operatorname{Exp}}\circ\psi\|^2=\langle\operatorname{Exp}_{p*}\circ\dot\psi,\operatorname{Exp}_{p*}\circ\dot\psi\rangle,$$

利用(7.3.4)可知

$$\begin{aligned}\|\dot{\operatorname{Exp}}\circ\psi\|^2&=\langle\dot\psi(t),b\rangle^2\langle\operatorname{Exp}_{p*}b,\operatorname{Exp}_{p*}b\rangle\\&\quad+\langle\dot\psi(t),a\rangle^2\geqslant\langle\dot\psi(t),a\rangle^2,\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

$$\begin{aligned}D\|\psi\|&=\frac{\langle\nabla_D\psi,\psi\rangle}{\|\psi\|}=\langle\dot\psi(t),\mathscr{T}_{\psi(t)}\frac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}\rangle\\&=\langle\dot\psi(t),a\rangle.\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

由此得出

$$\begin{aligned}L(\operatorname{Exp}\circ\psi)&=\int_0^1\|\dot{\operatorname{Exp}}\circ\psi\|dt\geqslant\int_0^1|D\|\psi\||dt\geqslant\int_0^1D\|\psi\|dt\\&=\|\psi(1)\|-\|\psi(0)\|=\|v\|=L(\operatorname{Exp}\circ\varphi),\end{aligned}$$

这证明了(7.3.6). 此外，当 $\operatorname{Exp}_{p*}b\neq 0$，在(7.3.8)中对 $t_0\in(0,1]$ 等式是不能成立的，由此得(7.3.7)，引理得证.

当 Exp_p 在 $\psi(t_0)$ 有最大秩，而 $\dot{\psi}(t_0)$ 非径向的，则不等式(7.3.8)成立的条件便可满足． 而当 ψ 与 φ 在 $\mathfrak{M}_p$ 的像不同时，必存在一 $t_0\in(0,1]$ 使得 $\dot{\psi}(t_0)$ 非径向．如其不然，根据(7.3.9)

$$D\|\psi\|_t=\|\dot{\psi}\|,$$

因而

$$L(\psi)=\int_0^1\|\dot{\psi}(t)\|dt=\|\psi(1)\|. \tag{7.3.10}$$

由于 ψ 与 φ 的像不同，存在 $\tilde{t}\in(0,1)$ 使得 $\psi(\tilde{t})$ 不在 φ 的像中，由三角不等式得知

$$\|\psi(\tilde{t})\|+\|\psi(1)-\psi(\tilde{t})\|>\|\psi(1)\|. \tag{7.3.11}$$

另一方面，在黎曼流形 $\mathfrak{M}_p$ 上，令 $\psi_0=\psi_{|[0,\tilde{t}]}$，$\psi_1=\psi_{|[\tilde{t},1]}$ 有

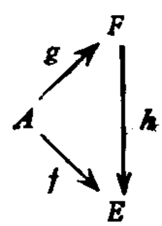
$$L(\psi_0)\geqslant\|\psi(\tilde{t})\|,\ L(\psi_1)\geqslant\|\psi(1)-\psi(\tilde{t})\|,$$

因而根据(7.3.11)

$$L(\psi)=L(\psi_0)+L(\psi_1)>\|\psi(1)\|,$$

这与(7.3.10)矛盾．

设 A，E，F 是拓扑空间，若连续映照



适合 $h\circ g=f$，则称 f 为经 h 在 F 提升为 g．若 $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是测地线，$p=c(0)$，$q=c(\beta)$，则 c 恒能经 Exp_p 提升到切空间 $\mathfrak{M}_p$，因为直线 $\varphi:[0,\beta]\to\mathfrak{M}_p$ 适合 $\varphi(t)=t\dot{c}(0)$ 就满足 $\mathrm{Exp}\circ\varphi=c$． 设 $\tilde{c}:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是逐段光滑的曲线适合 $\tilde{c}(0)=p$，$\tilde{c}(\beta)=q$． 并设 $\tilde{c}$ 能经 Exp_p 在 $\mathfrak{M}_p$ 提升为一逐段光滑曲线 ψ 使得 $\psi(0)=\varphi(0)$，$\psi(\beta)=\varphi(\beta)$，则由引理 7.3.3 得知 $L(\tilde{c})\geqslant L(c)$。但一般情形并非 $\mathfrak{M}$ 中任一由 p 到 q 的

曲线都可经 Exp_p 提升在 $\mathfrak{M}_p$，使得提升后的曲线是由 0 到 $\varphi(\beta)$. 例如令 S^2 为二维球面，p 是北极，q 是南极，φ 是在 $\mathfrak{M}_p$ 中由 0 出发的直线段，使得 $\mathrm{Exp}\circ\varphi$ 是由 p 到 q 的半条子午线. 所有 S^2 中由 p 到 q 的半条子午线皆有同一始点和终点并有相同长度，这对应 $\mathfrak{M}_p$ 中由 0 出发的各个方向的长度相等的直线段，但终点是各不相同的.

定理 7.3.4 设 $c:[0,\ \beta]\to\mathfrak{M}$ 是没有共轭点的测地线，$V:[0,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$ 是 c 的真逐段光滑变分，则存在一 J 中 0 点的开区间 J_0，使得任一 $\varepsilon\in J_0$ 有 $L(\varepsilon)\geqslant L(0)$，并且当曲线 V_ε 与 $V_0=c$ 不是经一参数变换而相同时，$L(\varepsilon)>L(0)$.

证 令 $p=c(0)$, $\varphi:[0,\beta]\to\mathfrak{M}_p$ 为直线, $\varphi(t)=t\dot{c}(0)$. c 没有共轭点，则据定理 7.2.4，对每一 $t\in(0,\ \beta]$，Exp_p 在 $\varphi(t)$ 是可微分，并且有最高之秩，因此能有一分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_l=\beta$ 使得区间 $[t_{\nu-1},t_\nu]$ 在 φ 下的像包含于 $\mathfrak{M}_p$ 的 $\varphi(t_{\nu-1})$ 一邻域 U_ν 中，而 $h_\nu=\mathrm{Exp}|_{U_\nu}$ 是微分同胚. 由于 V 是连续的，对每一紧的区间 $[t_{\nu-1},\ t_\nu]$ 存在一数 $\eta_\nu>0$，使得 $V([t_{\nu-1},\ t_\nu]\times(-\eta_\nu,\eta_\nu))\subset\mathrm{Exp}U_\nu$. 令 $J_0=(-\eta,\ \eta)$，$\eta=\min\{\eta_1,\ \cdots,\ \eta_l\}$. 于是 c 的真逐段变分 $V_{|[0,\beta]\times J_0}$ 有一经 Exp_p 提升为 $\mathfrak{M}_p$ 中 φ 的真的逐段变分 $\Phi:[0,\ \beta]\times J_0\to\mathfrak{M}_p$, $\Phi(t,\ \varepsilon)=h_\nu^{-1}\circ V(t,\ \varepsilon)$，当 $(t,\ \varepsilon)\in[t_{\nu-1},t_\nu]\times J_0$，而定理由引理 7.3.3 得出.

§7.4 测地线的指数式

设 E 是实向量空间，对称的双线性映照 $f:E\times E\to R$ 当限制在对角线上时称为二次型. f 称为恒定的，如 f 是正定或负定的，否则 f 称为非恒定的.

设 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是正则的测地线而 $\mathfrak{V}'_c$ 为所有沿 c 的逐段光滑向量场 Z 适合 $\langle Z,\dot{c}\rangle=0$ 所形成的实线性空间。我们把弧长的二次变分的 Synge 公式 (7.1.4) 和 (7.1.10) 双线性化，定义 $I:\mathfrak{V}'_c\times\mathfrak{V}'_c\to R$ 为

$$I(X,Y)=\int_\alpha^\beta(\langle X',Y'\rangle-\langle R(X,\dot{c})\dot{c},Y\rangle)|_t dt,\tag{7.4.1}$$

显然 I 是对称的双线性式，称为 c 的**指数式**。

对于可微分的向量场 $X,Y\in\mathfrak{V}'_c$ 有

$$D\langle X',Y\rangle=\langle X'',Y\rangle+\langle X',Y'\rangle,$$

因此得出

$$I(X,Y)=\langle X',Y\rangle\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\langle X''+R(X,\dot{c})\dot{c},Y\rangle dt.\tag{7.4.2}$$

由于 I 是对称的，有

$$I(X,Y)=\langle X,Y'\rangle\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\langle X,Y''+R(Y,\dot{c})\dot{c}\rangle dt.\tag{7.4.3}$$

若 Y 是一 Jacobi 场，则

$$I(X,Y)=\langle X,Y'\rangle|_\alpha^\beta.\tag{7.4.4}$$

c 的指数式对应有一 $\mathfrak{V}'_c$ 上的二次型. 任一 $Y\in\mathfrak{V}'_c$，根据(7.1.11)可知，有一逐段变分使得 Y 为变分向量. 令 $\mathfrak{V}''_c$ 表 $\mathfrak{V}'_c$ 的子空间由 $Y\in\mathfrak{V}'_c$ 适合 $Y(\alpha)=Y(\beta)=0$ 所成. 由(7.1.9)与(7.1.10)可知

$$L'(0)=0,\ L''(0)=I(Y,Y),\tag{7.4.5}$$

其中 $V(t,\varepsilon)=\mathrm{Exp}_{c(t)}(\varepsilon Y(t))$，$V_*D_{2|t,0}=Y(t)$.

若有一逐段光滑的向量场 $Y\in\mathfrak{V}''_c$ 适合 $I(Y,Y)<0$，则由 (7.4.5) 可知，有一 R 的 0 点的充分小邻域 J 使得 $L(\varepsilon)<L(0)$，当 $\varepsilon\neq0$，因此 L 在 0 点是一极大.

引理 7.4.1 设 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是正则测地线，有一共轭

点 $t_1\in(\alpha,\beta)$，则有一真的逐段变分 $V:[\alpha,\beta]\times J\to\mathfrak{M}$，使得在 J 的 0 点的邻域中 $L(\varepsilon)<L(0)$，当 $\varepsilon\neq 0$.

证 据假设存在沿 c 的 Jacobi 场 Y，$Y\neq 0$ 而 $Y(\alpha)=Y(t_1)=0$. 我们要由 Y 构造一逐段光滑的向量场 $\tilde{Y}$ 使得 $I(\tilde{Y},\tilde{Y})<0$ 便证明了引理.

已知 $\langle Y,\dot{c}\rangle=0$ 及 $\langle Y',\dot{c}\rangle=0$. 首先指出 $Y'(t_1)\neq 0$，否则 $Y=0$. 作沿 c 的平行移动的向量场 Z_1 使 $Z_1(t_1)=-Y'(t_1)$. 由于 $\langle Z_1,\dot{c}\rangle_{|t_1}=-\langle Y',\dot{c}\rangle_{|t_1}=0$，故 $Z_1\in\mathfrak{V}'_c$. 取 ϕ 是 $[\alpha,\beta]$ 的可微分实函数适合 $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$ 及 $\phi(t_1)=1$，则 $Z=\phi Z_1\in\mathfrak{V}''_c$. 对任一 $\eta>0$，定义逐段光滑向量场 $Y_\eta\in\mathfrak{V}''_c$ 为

$$Y_\eta(t)=\begin{cases}Y(t)+\eta Z(t), & \text{当 } t\in[\alpha,t_1],\\ \eta Z(t), & \text{当 } t\in[t_1,\beta].\end{cases}$$

应用(7.4.1)与(7.4.4)可知在 $[\alpha,\beta]$ 有

$$I(Y_\eta,Y_\eta)=\langle Y,Y'\rangle_{|t_1}+2\eta\langle Z,Y'\rangle_{|t_1}+\eta^2 I(Z,Z).$$

由于 $Y(t_1)=0$，$Z(t_1)=-Y'(t_1)$ 得出 η 充分小时

$$I(Y_\eta,Y_\eta)=-2\eta\langle Y',Y'\rangle_{|t_1}+\eta^2 I(Z,Z)<0,$$

引理得证.

引理 7.4.2 设 $c:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是正则测地线，$\mathfrak{V}''_c$ 为所有逐段光滑的向量场 $Y\in\mathfrak{V}'_c$ 适合 $Y(\alpha)=Y(\beta)=0$ 所形成的实线性空间，则对于 $Y\in\mathfrak{V}''_c$，下面两种叙述是等价的：

(i) Y 是一沿 c 的 Jacobi 场，

(ii) 对所有 $Z\in\mathfrak{V}''_c$，适合 $I(Y,Z)=0$.

若在 (ii) 中 $Y\neq 0$，则称指数式在 Y 是"蜕化"的.

证 根据 (7.4.4) 可知，(i)⇒(ii). 现证 (ii)⇒(i). 作分割 $\alpha=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_l=\beta$ 使得 $Y_\nu=Y_{|[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]}$ 是可微分向量场. 选取可微分函数 $\phi_\nu:[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]\to R$ 使得 $\phi_\nu(\gamma_{\nu-1})=\phi_\nu(\gamma_\nu)=0$，而除此以外 $\phi_\nu(t)>0$. 在 $c_\nu=$

$\dot{c}|[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]$ 定义 $Z_\nu = \phi_\nu(Y_\nu''+R(Y_\nu,\dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu)$ 及 $Z(t)=Z_\nu(t)$，当 $t\in[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]$，则 $Z\in\mathfrak{V}_c''$. 由 (7.4.2) 可知

$$0=I(Y,Z)=\sum_{\nu=1}^{l}\langle Y_\nu',Z_\nu\rangle\Big|_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{l}\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu}\langle Y_\nu''+R(Y_\nu,\dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu,Z_\nu\rangle dt$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{l}\int_{\gamma_{\nu-1}}^{\gamma_\nu}\phi_\nu(t)\langle Y_\nu''+R(Y_\nu,\dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu,$$

$$Y_\nu''+R(Y_\nu,\dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu\rangle dt,$$

因此 $$Y_\nu''+R(Y_\nu,\dot{c}_\nu)\dot{c}_\nu=0,$$

因而 Y_ν 是 $[\gamma_{\nu-1},\gamma_\nu]$ 中的 Jacobi 场 $(\nu=1,\cdots,l)$. 对每一 $r\in\{1,\cdots,l-1\}$ 作向量场 $\tilde{Z}\in\mathfrak{V}_c''$ 适合

$$\tilde{Z}(\gamma_r)=Y_{r+1}'(\gamma_r)-Y_r'(\gamma_r) \text{ 及 } \tilde{Z}(\gamma_\nu)=0 \text{ 当 } \nu\neq r,$$

这是不难做到的. 据(7.4.4)

$$0=I(Y,\tilde{Z})=\sum_{\nu=1}^{l}[\langle Y_\nu'(\gamma_\nu),\tilde{Z}(\gamma_\nu)\rangle-\langle Y_\nu'(\gamma_{\nu-1}),$$

$$\tilde{Z}(\gamma_{\nu-1})\rangle]=-\langle Y_{r+1}'(\gamma_r)-Y_r'(\gamma_r),\tilde{Z}(\gamma_r)\rangle$$

$$=-\langle Y_{r+1}'(\gamma_r)-Y_r'(\gamma_r),Y_{r+1}'(\gamma_r)-Y_r'(\gamma_r)\rangle$$

得出 $Y_{r+1}'(\gamma_r)=Y_r'(\gamma_r)$. 由 Jacobi 场的唯一性得知 Y 在 γ_r 也是可微分的. 引理得证.

定理 7.4.3 设 $c=[\alpha,\beta]$ 是正则的测地线，则下面两种叙述是等价的：

(i) c 没有共轭点，

(ii) 沿 c 的指数式 I 在 $\mathfrak{V}_c''$ 是正定的.

证 (i)⇒(ii)，首先 $I(Y,Y)\geqslant 0$ 对所有 $Y\in\mathfrak{V}_c''$，否

则由 (7.4.5) 可知，$L(\varepsilon) < L(0)$，当 $\varepsilon \neq 0$. 而这与定理 7.3.4 矛盾. 若有 $Y \in \mathfrak{V}_c''$ 使 $I(Y, Y) = 0$，我们要证明必有 $Y = 0$. 取 $Z \in \mathfrak{V}_c''$ 及 $\eta > 0$，由

$$0 \leqslant I(Y - \eta Z, Y - \eta Z) = -2\eta I(Y, Z) + \eta^2 I(Z, Z)$$

可知必须 $I(Y, Z) = 0, \forall Z \in \mathfrak{V}_c''$. 而据引理 7.4.2 可知，$Y$ 是 Jacobi 场. 由于 c 没有共轭点，必须 $Y = 0$.

(ii)⇒(i) 设 $t_1 \in (\alpha, \beta]$ 是 c 的共轭点，于是存在沿 c 的非零 Jacobi 场 Y 适合 $Y(\alpha) = Y(t_1) = 0$，令 $Z(t) = Y(t)$，当 $t \in [\alpha_1, t_1]$，而 $Z(t) = 0$，当 $t \in [t_1, \beta]$，则 $Z \in \mathfrak{V}_c''$，于是 $I(Z, Z) = 0$ 而 $Z \neq 0$，这是矛盾.

由此定理可得出 Jacobi 场的极小性质. 设 $c:[\alpha, \beta] \to \mathfrak{M}$ 是没有共轭点的正则测地线，而 $Y \in \mathfrak{V}_c'$ 是一 Jacobi 场，则对任一向量场 $X \in \mathfrak{V}_c'$ 适合 $X(\alpha) = Y(\alpha), X(\beta) = Y(\beta)$ 有

$$I(X, X) > I(Y, Y)，当 X \neq Y. \tag{7.4.6}$$

实际上，由 $X - Y \in \mathfrak{V}_c''$ 及 $X - Y \neq 0$，可知 $I(X - Y, X - Y) > 0$. 另一方面，根据(7.4.4)有

$$\begin{aligned} I(X - Y, X - Y) &= I(X, X) - 2I(X, Y) + I(Y, Y) \\ &= I(X, X) - 2\langle X, Y'\rangle|_\alpha^\beta + \langle Y, Y'\rangle|_\alpha^\beta \\ &= I(X, X) - \langle X, Y'\rangle|_\alpha^\beta = I(X, X) - I(Y, Y), \end{aligned}$$

由此得出(7.4.6).

现设 E 是实向量空间，f 是 E 上的二次型，f 的(广义)**指数**是使得 f 为（半）负定的 E 的子空间的维数的上确界. 若 $c:[\alpha, \beta] \to \mathfrak{M}$ 是正则测地线，$\mathfrak{V}_c''$ 定义如上，$I: \mathfrak{V}_c'' \times \mathfrak{V}_c'' \to R$ 所对应在 $\mathfrak{V}_c''$ 上二次型（广义）指数称为 c 的（广义的）**指数**. 我们以 $\mathrm{Ind}\,c$ 及 $\mathrm{Ind}_0 c$ 分别表示 c 的指数与广义指数.

引理 7.4.4 设 $c:[0, \beta]$ 为正则测地线，$\mathscr{J}_c^\beta$ 是 $\mathfrak{V}_c''$ 中的 Jacobi 场所成子空间，则有 $\mathrm{Ind}\,c$ 及 $\mathrm{Ind}_0 c$ 有限，且

$$\mathrm{Ind}_0 c = \mathrm{Ind} c + \dim \mathscr{J}_c^\beta. \tag{7.4.7}$$

证 作分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_l=\beta$ 使得 $c|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ 没有共轭点. 对任意 $v\in\mathfrak{M}_{c(t_{\nu-1})}$ 及 $w\in\mathfrak{M}_{c(t_\nu)}$ 存在唯一的沿 $c|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ 的 Jacobi 场 Z 适合 $Z(t_{\nu-1})=v$, $Z(t_\nu)=w$. 令 $\mathscr{J}_c''$ 为 $\mathfrak{V}_c''$ 中的向量场 Y 使得 $Y|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ 是 Jacobi 场所成子空间,则 $\dim\mathscr{J}_c''=(m-1)(l-1)$. 定义线性映照 $\varphi:\mathfrak{V}_c''\to\mathscr{J}_c''$ 对每一 $X\in\mathfrak{V}_c''$ 定义 $\varphi X|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ 是一沿 $c|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ 的 Jacobi 场 Y_ν, 适合 $Y_\nu(t_{\nu-1})=X(t_{\nu-1})$ 及 $Y_\nu(t_\nu)=X(t_\nu)$, $\nu=1,\cdots l$. 则当 $X\in\mathscr{J}_c''$ 时 $\varphi X=X$. 由 (7.4.6) 可知

$$I(X,X)>I(\varphi X,\varphi X), \tag{7.4.8}$$

当 $X\in\mathfrak{V}_c''$ 而 $X\bar{\in}\mathscr{J}_c''$. 设 A 是 $\mathfrak{V}_c''$ 的子空间, 使得 I 为(半)负定,则 $\varphi|_A$ 是内射,否则存在 $X\in A$ 而 $X\neq 0$, 使$\varphi X=0$, 于是 $X\bar{\in}\mathscr{J}_c''$. 由 (7.4.8) 可知, $I(X,X)>I(\varphi X,\varphi X)=0$, 这与 $I(X,X)\leqslant 0$ 矛盾. 由此可知, $\dim A\leqslant\dim\mathscr{J}_c''=(m-1)(l-1)$. 而 $\mathrm{Ind}c$ 与 $\mathrm{Ind}_0 c$ 皆为有限. 令 $\mathrm{Ind}'c$ ($\mathrm{Ind}_0'c$) 为 I 限制在 $\mathscr{J}_c''$ 的(广义的) 指数, 则上面证明了 $\mathrm{Ind}c\leqslant\mathrm{Ind}'c$, $\mathrm{Ind}_0c\leqslant\mathrm{Ind}_0'c$. 由于 $\mathscr{J}_c''\subset\mathfrak{V}_c''$, $\mathrm{Ind}'c\leqslant\mathrm{Ind}c$, $\mathrm{Ind}_0'c\leqslant\mathrm{Ind}_0c$, 故有 $\mathrm{Ind}c=\mathrm{Ind}'c$ 及 $\mathrm{Ind}_0c=\mathrm{Ind}_0'c$.

现设另一分割 $0=s_0<s_1<\cdots<s_q=\beta$, 使得 $\{s_1,\cdots,s_{q-1}\}\cap\{t_1,\cdots,t_{l-1}\}=\phi$. 令 $\tilde{\mathscr{J}}_c''$ 为 $Y\in\mathfrak{V}_c''$ 的子空间,使得 $Y|_{[s_{\nu-1},s_\nu]}$ 为 Jacobi 场,则 $\tilde{\mathscr{J}}_c''\cap\mathscr{J}_c''=\mathscr{J}_c^\beta$, 并且对于所有 $X\in\tilde{\mathscr{J}}_c''$, 但 $X\bar{\in}\mathscr{J}_c^\beta$, (7.4.8) 成立. 由上面的证明可知, 有一子空间 $\tilde{B}_0\subset\tilde{\mathscr{J}}_c''$ 适合 $\dim\tilde{B}_0=\mathrm{ind}_0c$ 使得 I 在 $\tilde{B}_0$ 是半定负的,而根据 (7.4.8) 可知, $\varphi|_{\tilde{B}_0}$ 是内射. 令 $B_0=\varphi\tilde{B}_0$, 我们有 $\dim B_0=\dim\tilde{B}_0=\mathrm{Ind}_0c$. 令 B 为 B_0 中 $\mathscr{J}_c^\beta$ 的补空间, 即有

$$B_0=B\oplus\mathscr{J}_c^\beta. \tag{7.4.9}$$

由(7.4.8)可知, I 在 B 是定负的. 若 $\dim B=\mathrm{Ind}c$, 则等式 (7.4.7) 便得到证明. 已知存在子空间 $B'\subset\mathscr{J}_c''$ 适合 $\dim B'$

$=\text{Ind}c$ 使得 I 是定负. 显然 $\dim B' \geqslant \dim B$，若 $\dim B' > \dim B$，则有 $\dim B' \oplus \mathscr{J}_c^\beta > \dim B \oplus \mathscr{J}_c^\beta = \text{Ind}_0 c$，而由 (7.4.4) 可知，$I$ 在 $B' \oplus \mathscr{J}_c^\beta$ 是半负定的，这是不可能，引理得证.

定理 7.4.5（指数定理） 设 $c: [0, \beta] \to \mathfrak{M}$ 是正则测地线，对 $t \in (0, \beta]$ 令 $\mathscr{J}_c^t$ 表沿 c 的 Jacobi 场适合 $Y(0) = Y(t) = 0$ 所成的空间，则 c 只有有限多个共轭点，并且

$$\text{Ind}c = \sum_{t \in (0,\beta)} \dim \mathscr{J}_c^t, \text{Ind}_0 c = \sum_{t \in (0,\beta]} \dim \mathscr{J}_c^t. \quad (7.4.10)$$

此外，若 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 是 c 在$(0, \beta]$的所有共轭点，其重数分别为 $m_1, \cdots, m_r$，则 $\text{Ind}c = \sum_{i=1}^r m_i$，即 c 的指数是 $(0, \beta)$ 中共轭点的重数之和.

证 设 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r \in [0, \beta]$ 是 c 的彼此不相同的共轭点. 已知 $t_1 \in (0, \beta]$ 是 c 的共轭点，当且仅当 $\dim \mathscr{J}_c^{t_1} \geqslant 1$. 令线性安装 $\iota: \mathscr{J}_c^{t_1} \to \mathfrak{V}_c''$ 为

$$(\iota Y)_t = \begin{cases} Y_t, & \text{当 } t \in [0, t_1]; \\ 0, & \text{当 } t \in (t_1, \beta]. \end{cases}$$

考虑 $\mathfrak{V}_c''$ 的子空间 $A_i = \iota \mathscr{J}_c^{\gamma_i}$，$i = 1, \cdots r$. 当 $Z \in A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$，则 $I(Z, Z) = 0$. 由此可知

$$\text{Ind}_0 c \geqslant \dim A_1 + \cdots + \dim A_r \geqslant r.$$

据引理 7.4.4 可知，$\text{Ind}_0 c$ 是有限的，因此 c 只能有有限多个共轭点.

定义函数 $\varphi, \varphi_0: (0, \beta) \to \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ 是具有离散拓扑的整数）为 $\varphi(t) = \text{Ind}c|_{[0,t]}$，$\varphi_0(t) = \text{Ind}_0 c|_{[0,t]}$. 根据 (7.4.7)，$\varphi_0(t) - \varphi(t) = 0$ 对所有 $t \in (0, \beta] - \{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\}$，因而

$$\sum_{t \in (0,\beta]} (\varphi_0(t) - \varphi(t)) = \sum_{i=1}^r (\varphi_0(\gamma_i) - \varphi(\gamma_i)).$$

我们可以断言，φ 是左连续而 φ_0 是右连续. 如是则得出

$$0=\lim_{\substack{t\to\gamma_{i+1}\\ t>\gamma_i}}(\varphi_0(t)-\varphi(t))=\varphi_0(\gamma_i)-\varphi(\gamma_{i+1}),$$

$$i=1,\cdots,r-1,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{r}(\varphi_0(\gamma_i)-\varphi(\gamma_i))=\varphi_0(\gamma_r)-\varphi(\gamma_1).$$

由于 φ 左连续，由定理 7.4.3 可知，$\varphi(\gamma_1)=0$，φ_0 在 $[\gamma_r,\beta]$ 是常数，故由(7.4.7)可知

$$\varphi_0(\beta)=\sum_{t\in(0,\beta]}(\varphi_0(t)-\varphi(t))=\sum_{t\in(0,\beta]}\dim\mathscr{J}_c^t,$$

这就证明了(7.4.10)的第二式，而第一式是由第二式再应用(7.4.7)得出的.

现证 φ 是左连续，φ_0 是右连续. 首先 φ 与 φ_0 皆是弱单调增. 对 $t_1, t_2\in(0,\beta]$，$t_1\leqslant t_2$，$c_1=c|_{[0,t_1]}$，$c_2=c|_{[0,t_2]}$ 定义线性安装 $\iota:\mathfrak{V}''_{c_1}\to\mathfrak{V}''_{c_2}$ 为

$$(\iota Y)_t=\begin{cases}Y_t, & \text{当 } t\in[0,t_1],\\ 0, & \text{当 } t\bar{\in}[0,t_1],\end{cases}$$

则有 $I(Y,Y)=I(\iota Y,\iota Y)$，$Y\in\mathfrak{V}''_{c_1}$. 对 $\tilde{t}\in(0,\beta]$ 作分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_l=\tilde{t}$ 使得 $0<t_\nu-t_{\nu-1}>\delta$，取 δ 充分小，使得 $c|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ 没有共轭点. 取 J 为 $(0,\beta]$ 中的开邻域使得 $\tilde{t}\in J$，$t_{l-1}\bar{\in}J$ 而 $|t-t_{l-1}|<\delta$ 当 $t\in J$. 令 $c_t=c|_{[0,t]}$，对每一 $t\in J$，考虑 $\mathfrak{V}''_{c_t}$ 的子空间 $\mathscr{S}''_{c_t}$ 由所有 $Y\in\mathfrak{V}''_{c_t}$ 使得 $Y|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$，$Y_{[t_{l-1},t]}$是 Jacobi 场所组成. 由引理 7.4.4 的证明中知道，$\varphi(t)$ 是 I 限制在 $\mathscr{S}''_{c_t}(t\in J)$ 的指数，$\varphi_0(t)$ 是广义指数. 作同构

$$\Phi_t:\mathscr{S}''_{c_t}\to\mathfrak{M}_{c(t_1)}\times\cdots\times\mathfrak{M}_{c(t_{l-1})}\overset{\text{def}}{=\!=}E,$$

$$Y \longmapsto (Y(t_1), \cdots, Y(t_{l-1})).$$

定义E上的二次型 Q_t

$$Q_t(u, v) = I(\Phi_t^{-1}u, \Phi_t^{-1}v),$$

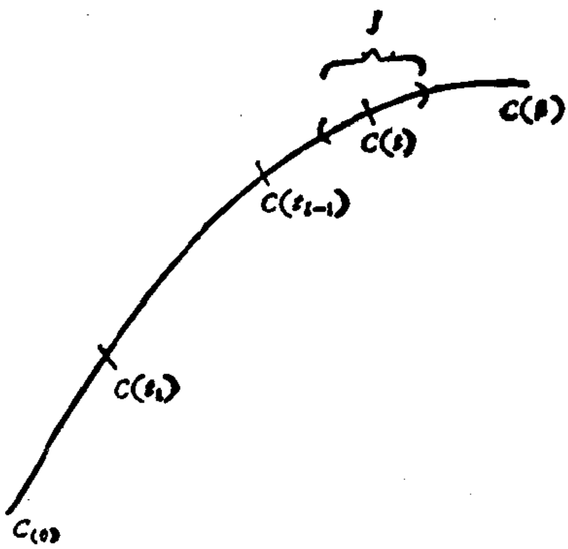
而$\varphi(t)$是Q_t的指数，$\varphi_0(t)$是广义指数. 映照$Q: E \times E \times J \to R$使$Q(u, v, t) = Q_t(u, v)$是连续的. 实际上，若$B$为所有$Y|_{[0, t_{l-1}]}$，$Y \in \mathscr{J}''_{c_t}$的向量场所成空间. 有同构$\Phi: B \to E$，使

$$Z \longmapsto (Z(t_1), \cdots, Z(t_{l-1})).$$

令 Jacobi 场

$$X_{u,t} = (\Phi_t^{-1}u)|_{[t_{l-1}, t]},$$

$$Y_{v,t} = (\Phi_t^{-1}v)|_{[t_{l-1}, t]},$$



则由(7.4.4)可知，

$$Q(u, v, t) = I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v) + I(X_{u,t}, Y_{v,t})$$

$$= I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v) + \langle X_{u,t}, Y'_{v,t}\rangle|_{t_{l-1}}^{t}.$$

映照$(u, v) \to I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v)$是$E \times E$的双线性式，故$(u, v, t) \to I(\Phi^{-1}u, \Phi^{-1}v)$是连续的. 不难证明，若$Z$是沿测地线$c': [0, r] \to \mathfrak{M}$的 Jacobi 场，则$Z^-(t) = Z(r - t)$是逆方向沿$c'$的 Jacobi 场，我们可以应用引理 7.2.3 来构造 Jacobi 场$X_{u,t}$与$Y_{v,t}$，显然对t是连续的. 因而$(u, v, t) \to \langle X_{u,t}, Y'_{v,t}\rangle|_{t_{l-1}}^{t}$是连续的，这证明$Q$是连续的.

在E中选取欧氏空间的拓扑积的度量为E的度量，设A是E的子空间使得$\dim A = \varphi(\bar{t})$，即$Q_{\bar{t}}$在$A$是负定的. 令$S = \{u | u \in A, \|u\| = 1\}$. 由于$Q$是连续而$S$是紧，存在$J$中$\bar{t}$的邻域$J_0$使得$Q(u, u, t) = Q_t(u, u) < 0$对所有$u \in S$,

$t\in J_0$，因而有 $Q_t(u,u)<0$ 对所有 $u\in A$，$u\neq 0$，$t\in J_0$，故有 $\varphi(t)\geqslant\varphi(\tilde{t})$，当 $t\in J_0$. 另一方面，由于 φ 是弱单调增的，因此 $\varphi(t)=\varphi(\tilde{t})$ 当 $t\in J_0$，$t\leqslant\tilde{t}$，故 φ 在 $\tilde{t}$ 是左连续. 令 s_μ 是 J 中的一串点使得 $s_\mu>\tilde{t}$，$\lim s_\mu=\tilde{t}$. 我们要证 $\lim\varphi_0(s_\mu)=\varphi_0(\tilde{t})$，即 φ_0 在 $\tilde{t}$ 右连续. 实际上，因 φ_0 是弱单调增而只取有限的整数值，我们不妨假定 $\varphi_0(s_\mu)=k\geqslant 0$ 对所有 μ，注意 $\varphi_0(\tilde{t})\leqslant k$. 选取 E 的 k 维子空间 A_μ 使得 Q_{s_μ} 在 A_μ 是半负定的. 取 A_μ 的一组正交就范基 $a_\mu^1,\cdots,a_\mu^k$，我们不妨假定对每一 i，a_μ^i 是收敛的，否则取一子串使之如此. 设 $a_0^i=\lim\limits_\mu a_\mu^i$，则 $a_0^1,\cdots,a_0^k$ 是 E 的一个 k 维子空间 A_0 的正交就范基. 对任一 $u=\sum\limits_{i=1}^k\alpha_i a_0^i$ 有一串 $u_\mu=\sum\limits_{i=1}^k\alpha_i a_\mu^i$ 使 $\lim u_\mu=u$，由于 Q 的连续性

$$Q_{\tilde{t}}(u,u)=\lim Q(u_\mu,u_\mu,s_\mu)\leqslant 0.$$

这表示 $Q_{\tilde{t}}$ 在 A_0 是半定负，因此 $\varphi_0(\tilde{t})\geqslant k$，这证明 $\varphi_0(\tilde{t})=k=\lim\varphi_0(s_\mu)$，故 φ_0 在 $\tilde{t}$ 右连续. 定理的第一部分得证. 定理的第二部分是由于 $\mathscr{J}_c^t=0$ 当 t 非 c 的共轭点及定理 7.2.5 得出.

由上述定理可知，Exp_p 的非常点在 $\mathfrak{M}_p$ 中由 0 出发的直线上是孤立的，但是它们可以在 Exp_p 的定义域的边界上积聚起来.

§7.5 Morse-Schönberg 比较定理

以曲率来刻划完备黎曼流形的拓扑性质是近代微分几何发展的径途之一，而有决定意义的一步是首先用曲率来作一些几何性质的比较，此即对两黎曼流形的曲率关系比较相应

的微分几何与拓扑性质，然后研究标准空间(例如常曲率典型流形)的性质，在这方面的结果称为比较定理。

本节中只考虑m维黎曼流形，$m \geqslant 2$，所用联络限于黎曼联络。

设$\mathfrak{M}$是黎曼流形，$c: J \to \mathfrak{M}$是正则测地线，对$t \in J$，令$G_{c,t}$表所有2维线性子空间$\sigma \subset \mathfrak{M}_{c(t)}$的集合，其中$\dot{c}(t) \in \sigma$。令$G_c = \bigcup_{t \in J} G_{c,t}$。在(1.3.14)中，我们曾经定义$\mathfrak{M}_p$中对两个向量$\xi, \zeta$的黎曼曲率$K(p, \xi, \zeta)$，此两向量生成2维平面$\sigma$，不难证明，黎曼曲率只和$\sigma$有关，而与$\sigma$中所取的基无关，即若$u, v \in \sigma$为两独立向量，则有$K(p, u, v) = K(p, \xi, \zeta)$，故我们可用$K_\sigma$表示一平面$\sigma \subset \mathfrak{M}_p$的曲率，也称为截曲率(sectional curvature)。

定理 7.5.1 设$\mathfrak{M}$与$\tilde{\mathfrak{M}}$为相同维数的黎曼流形。$c: [0, \beta] \to \mathfrak{M}$，$\tilde{c}: [0, \beta] \to \tilde{\mathfrak{M}}$分别是正则的测地线。$\mathfrak{M}$沿$c$的曲率不大于$\tilde{\mathfrak{M}}$沿$\tilde{c}$的曲率，此即有一线性的等度变换$\iota: \mathfrak{M}_{c(0)} \to \tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{c}(0)}$满足$\iota\dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$使得

$$K_\sigma \leqslant K_{\tilde{\sigma}}, \tag{7.5.1}$$

对所有$\sigma \in G_{c,t}$，$\tilde{\sigma} = \Phi_t \sigma \in G_{\tilde{c},t}$对所有$t \in [0, \beta]$，其中$\Phi_t$是由$\iota$用下面(7.5.3)定义，则$c$与$\tilde{c}$的(广义的)指数满足

$$\operatorname{Ind} c \leqslant \operatorname{Ind} \tilde{c}, \ \operatorname{Ind}_0 c \leqslant \operatorname{Ind}_0 \tilde{c}. \tag{7.5.2}$$

证 任一$t \in [0, \beta]$定义映照

$$\Phi_t: \mathfrak{M}_{c(t)} \to \tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{c}(t)} \tag{7.5.3}$$

如下：如$u \in \mathfrak{M}_{c(t)}$，沿$c$平行移动到$\mathfrak{M}_{c(0)}$，经等度变换$\iota$映为$\tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{c}(0)}$的向量，然后平行移动到$\tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{c}(t)}$。$\Phi_t$是一等度变换，特别是$\Phi_0 = \iota$。

令$\mathfrak{V}'_c$，$\mathfrak{V}'_{\tilde{c}}$分别是沿$c, \tilde{c}$的逐段光滑向量场正交于$\dot{c}, \dot{\tilde{c}}$所成的实线性空间。定义映照

$$\Phi: \mathfrak{V}'_c \to \mathfrak{V}'_{\tilde{c}} \tag{7.5.4}$$

为 $(\Phi X)_t = \Phi_t X_t$，任意 $X \in \mathfrak{V}'_c$. 由定义可知，如 X 是可微分的，则 ΦX 亦然. 设 $v_1, \cdots, v_m$ 是 $\mathfrak{M}_{c(0)}$ 的一组正交就范基，其中 $v_m = \dot{c}(0)$. $Z_1, \cdots, Z_m$ 是 c 平行移动的向量场适合 $Z_i(0) = v_i$，则 $Z_1(t), \cdots, Z_m(t)$ 是 $\mathfrak{M}_{c(t)}$ 的一组正交就范基，对任一 $t \in [0, \beta]$（参阅命题(6.2.5)). 对任一 $X \in \mathfrak{M}_{c(t)}$ 可写为 $X = \varphi^j Z_j$，其中 $\varphi^j = \langle X, Z_j\rangle$ 是逐段光滑的. 显而易见

$$\Phi X = \varphi^j \tilde{Z}_j, \tag{7.5.5}$$

其中 $\tilde{Z}_j$ 是沿 $\tilde{c}$ 平行移动向量场满足 $\tilde{Z}_j(0) = \iota v_j$. 由此可知，$\Phi$ 是 $\mathfrak{V}'_c$ 到 $\mathfrak{V}'_{\tilde{c}}$ 的同构，并且 $\langle X, Y\rangle = \langle \Phi X, \Phi Y\rangle$，对任两 $X, Y \in \mathfrak{V}'_c$. 此外，由(7.5.5)可知

$$\Phi X' = (\Phi X)'. \tag{7.5.6}$$

我们要证明

$$I(X, X) \geqslant I(\Phi X, \Phi X), \text{ 对任一 } X \in \mathfrak{V}'_c. \tag{7.5.7}$$

实际上，若 R, $\tilde{R}$ 分别是 $\mathfrak{M}$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ 的曲率张量，而 $t \in [0, \beta]$. 则当 $X(t) = 0$ 时，$\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle = \langle \tilde{R}(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \Phi X\rangle = 0$. 而当 $X(t) \neq 0$ 时，据假设

$$\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle \leqslant \langle \tilde{R}(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \Phi X\rangle,$$

因此由(7.5.6)可知

$$\begin{aligned} I(X, X) &= \int_0^\beta (\langle X', X'\rangle - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle) dt \\ &\geqslant \int_0^\beta (\langle (\Phi X)', (\Phi X)'\rangle - \langle \tilde{R}(\Phi X, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \Phi X\rangle) dt \\ &= I(\Phi X, \Phi X). \end{aligned}$$

令 $\mathfrak{V}''_c$ 为所有向量场 $X \in \mathfrak{V}'_c$ 适合 $X(0) = X(\beta) = 0$ 所成子空间，相应地令 $\mathfrak{V}''_{\tilde{c}} \subset \mathfrak{V}'_{\tilde{c}}$. 显而易见，$\Phi \mathfrak{V}''_c = \mathfrak{V}''_{\tilde{c}}$，并且 Φ 是 $\mathfrak{V}''_c$ 到 $\mathfrak{V}''_{\tilde{c}}$ 的同构. 令 A 为 $\mathfrak{V}''_c$ 中最大维数的子空间使得 I 在 A 是(半)负定的，则 $\Phi A \subset \mathfrak{V}''_{\tilde{c}}$ 是同维数的 $\mathfrak{V}''_{\tilde{c}}$ 的子

空间，据(7.5.7)，使 I 在 ΦA（半）负定，这证明了(7.5.2)。

定理 7.5.2（Morse-Schönberg 比较定理） 设 $\mathfrak{M}$ 是 m 维黎曼流形，$c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是正则测地线

（i）若有 $\lambda>0$ 使得 $K_\sigma\leqslant\lambda$ 对所有 $\sigma\in G_c$，又有整数 $\nu\geqslant 0$ 使得 $L(c)<(\nu+1)\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ 或者 $L(c)\leqslant(\nu+1)\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$，则 $\operatorname{Ind}c\leqslant\operatorname{Ind}_0c\leqslant\nu(m-1)$ 或者 $\operatorname{Ind}c\leqslant\nu(m-1)$。特别当 $L(c)<\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ 时，c 没有共轭点。

（ii）若 $K_\sigma\leqslant 0$ 对所有 $\sigma\in G_c$，则 c 没有共轭点，$\operatorname{Ind}c=\operatorname{Ind}_0c=0$。

（iii）若 $0<\chi\leqslant K_\sigma$ 对所有 $\sigma\in G_c$ 及 $L(c)\geqslant\dfrac{\nu\pi}{\sqrt{\chi}}$ 或者 $L(c)>\dfrac{\nu\pi}{\sqrt{\chi}}$，其中整数 $\nu\geqslant 1$，则 $\operatorname{Ind}_0c\geqslant\nu(m-1)$ 或者 $\operatorname{Ind}_0c\geqslant\operatorname{Ind}c\geqslant\nu(m-1)$，而 c 分别在 $(0,\beta]$ 或者 $(0,\beta)$ 最少有一共轭点。

在证明此定理之前，我们先研究一下有正常数曲率的典型流形 S^m_ρ，即 R^{m+1} 中以原点为心 ρ 为半径的球面。令 $\iota:S^m_\rho\to R^{m+1}$ 是自然的安装，于是由 R^{m+1} 的欧氏度量诱导出 S^m_ρ 的度量 $\langle,\rangle$。令 $e,\tilde{e}\in R^{m+1}$ 是两个互相正交的单位向量，考虑可微分曲线 $c:[0,2\pi\rho]\to R^{m+1}$，定义为

$$c(t)=\rho e\cos\frac{t}{\rho}+\rho\tilde{e}\sin\frac{t}{\rho}.\tag{7.5.8}$$

由于 $\|c(t)\|=\rho$，$c(t)$ 定义了在 S^m_ρ 的一曲线 $\tilde{c}(t)$，使 $\iota\tilde{c}(t)=c(t)$。$c(t)$ 是由 e 与 $\tilde{e}$ 张成的 R^{m+1} 的二维子空间与 S^m_ρ 的相交，这称为子午线或者大圆。由于 $\|\dot{\tilde{c}}(t)\|=\|\dot{c}(t)\|=1$，

$\tilde{c}(t)$ 是正则的. 在 R^{m+1} 中

$$\nabla_D \dot{c}(t) = -\frac{1}{\rho} e \cos\frac{t}{\rho} - \frac{1}{\rho} \tilde{e} \sin\frac{t}{\rho},$$

这是与 S_ρ^m 在 $c(t)$ 点任一切向量正交的. 令 $\tilde{\nabla}$ 是 S_ρ^m 中的黎曼联络, 则由定理 6.4.1 可知, $V(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t))\iota_*\tilde{\nabla}_D\dot{\tilde{c}}(t) = \nabla_D\dot{c}(t)$, 由于 $V(\dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t))$ 及 $\nabla_D\dot{c}(t)$ 与 S_ρ^m 垂直

$$0 = \langle \iota_* Z, \nabla_D \dot{c}(t)\rangle = \langle Z, \tilde{\nabla}_D \dot{\tilde{c}}(t)\rangle,$$

对所有 $Z \in (S_\rho^m)_{c(t)}$, 故有 $\tilde{\nabla}_D\dot{\tilde{c}}(t) = 0$, 即 $\tilde{c}(t)$ 是 S_ρ^m 的测地线.

为简便起见, 令 $\mathfrak{M} = S_\rho^m$, 称 $p = (0, \cdots, 0, \rho) \in \mathfrak{M}$ 为北极. 令 $w_i \in \mathfrak{M}_p$, 使 $\iota_* w_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ $(i = 1, \cdots, m)$, 这是 $\mathfrak{M}_p$ 的一组正交基. 对于向量 $v = a^1 w_1 + \cdots + a^m w_m \in \mathfrak{M}_p$, 指数映照 $\mathrm{Exp}_p: \mathfrak{M}_p \to \mathfrak{M}$ 为

$$\begin{cases} \mathrm{Exp}_p(v) = p\cos\dfrac{\|a\|}{\rho} + \rho\dfrac{a}{\|a\|}\sin\dfrac{\|a\|}{\rho}, & v \neq 0, \\ \mathrm{Exp}_p(0) = p, \quad a = (a^1, \cdots, a^m, 0), \end{cases} \tag{7.5.9}$$

因为对每一 $v \in \mathfrak{M}_p$, 过 v 的直线 $c: R \to \mathfrak{M}$ 使得 $c(t) = \mathrm{Exp}_p(tv)$ 是测地线满足 $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = v$.

令 a' 表示 a 的转置, 由于

$$d\mathrm{Exp}_p(v) = -p\sin\frac{\|a\|}{\rho}\cdot\frac{da\cdot a'}{\rho\|a\|} + \frac{a}{\|a\|}\cos\frac{\|a\|}{\rho}\frac{da\cdot a'}{\|a\|} + \rho\sin\frac{\|a\|}{\rho}\left(\frac{da}{\|a\|} - \frac{a\,da\cdot a'}{\|a\|^3}\right).$$

若令 $\tilde{a} = (a^1, \cdots, a^m)$, 上式即

$$d\mathrm{Exp}_p(v) = \frac{d\tilde{a}}{\|a\|}\left(\rho\sin\frac{\|a\|}{\rho} I + \frac{1}{\|a\|}\cos\frac{\|a\|}{\rho}\tilde{a}'\tilde{a} - \frac{\rho}{\|a\|^2}\sin\frac{\|a\|}{\rho}\tilde{a}'\tilde{a},\ \sin\frac{\|a\|}{\rho}\tilde{a}'\right). \tag{7.5.10}$$

由此可知，若 $\mathrm{Exp}_{*|v}b=0$，其中 $b=b^1w_1+\cdots+b^mw_m\in(\mathfrak{M}_p)_v$. 令 $\tilde{b}=(b_1,\cdots,b_m)$，此即

$$\tilde{b}\left(\rho\sin\frac{\|a\|}{\rho}I+\frac{1}{\|a\|}\cos\frac{\|a\|}{\rho}\tilde{a}'\tilde{a}-\frac{\rho}{\|a\|^2}\sin\frac{\|a\|}{\rho}\tilde{a}'\tilde{a},\right.$$

$$\left.\sin\frac{\|a\|}{\rho}\tilde{a}'\right)=0,$$

则必须 $\tilde{b}\tilde{a}'=0$ 及 $\sin\dfrac{\|a\|}{\rho}=0$； 必须 $\|v\|=\|a\|=\nu\pi\rho$, $\nu=1,2,\cdots$, 因 $\|a\|\neq 0$，令 Λ_p^v 为 $b\in(\mathfrak{M}_p)_v$ 使 $\mathrm{Exp}_{*|v}b=0$ 所成子空间，则有

$$\dim\Lambda_p^v=m-1,\quad 当\ \|v\|=\nu\pi\rho,\ \nu=1,2,\cdots,$$

$$\dim\Lambda_p^v=0,\qquad 当\ \|v\|\ 不适合上述条件.$$

据 § 7.2 之末所述，正则测地线 $c:[0,\beta]\to S_\rho^m$ 在 $\beta=\nu\pi\rho$, $\nu=1,2,\cdots$ 为共轭点，其重数皆为 $m-1$，因此

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}\,c=\nu(m-1),\ 当\ \nu\pi\rho<\beta\leqslant(\nu+1)\pi\rho,\\&\mathrm{Ind}_0c=\nu(m-1),\ 当\ \nu\pi\rho\leqslant\beta<(\nu+1)\pi\rho.\end{aligned}\tag{7.5.11}$$

令 $(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 为 R^{m+1} 的坐标. 则 $(x^1,\cdots,x^m)$ 可用作 p 点的邻域的坐标，而 p 点的坐标为 $(0,0,\cdots,0)$,

$$x^{m+1}=\sqrt{\rho^2-\sum_{i=1}^m x^ix^i}.$$

由 R^{m+1} 诱导 S_ρ^m 的黎曼度量为

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{m+1}dx^\alpha dx^\alpha=\sum_{i,j=1}^m\left(\delta_{ij}+\frac{x^ix^j}{\rho^2-\sum_{k=1}^m x^kx^k}\right)dx^idx^j.\tag{7.5.12}$$

由计算可知，在 p 点

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = 0,$$

因此据（1.3.11）式在 p 点

$$R_{ijkl} = \frac{1}{\rho^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}), \tag{7.5.13}$$

由此可知，在 p 点 $K_\sigma = \frac{1}{\rho^2}$ 为常数。由于 S_ρ^m 经 R^{m+1} 中的正交变换下不变的，而 S_ρ^m 在正交变换下任一点皆可映为 p 点。并且由 R^{m+1} 诱导的度量在正交变换下是不变的。因此 S_ρ^m 的任一点的曲率皆为常数 $1/\rho^2$。

现在回到证明定理 7.5.2。

（i）考虑球面$S_{1/\sqrt{\lambda}}^m$，它的曲率为常数 λ，对于正则测地线 $\tilde{c}:[0,\beta] \to S_{1/\sqrt{\lambda}}^m$，有

$$\mathrm{Ind}_0\tilde{c} \leqslant \nu(m-1),\ \text{当}\ \beta < (\nu+1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\mathrm{Ind}\tilde{c} \leqslant \nu(m-1),\ \text{当}\ \beta \leqslant (\nu+1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

由此，由定理 7.5.1 得出（i）。

（ii）取 $\nu = 0$，λ 充分小，据（i）有，当 $K_\sigma \leqslant \lambda$，有

$$\mathrm{Ind}c = \mathrm{Ind}_0c = 0,\ \text{当}\ \beta < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

让 $\lambda \to 0$，即得（ii）。

（iii）取 $S_{1/\sqrt{\chi}}^m$，其曲率为 χ。对正则测地线$\tilde{c}:[0,\beta] \to S_{1/\sqrt{\chi}}^m$，有

$$\mathrm{Ind}_0\tilde{c} \geqslant \nu(m-1),\ \text{当}\ \beta \geqslant \frac{\nu\pi}{\sqrt{\chi}},$$

$$\mathrm{Ind}\tilde{c} \geqslant \nu(m-1),\ \text{当}\ \beta > \frac{\nu\pi}{\sqrt{\chi}},$$

同样由定理 7.5.1 得出 (iii).

设 $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 是正则测地线,而

$$0<\chi\leqslant K_\sigma\leqslant\lambda$$

对所有 $\sigma\in G_c$. 设 $t_1\in(0,\beta]$ 为 c 的第一个共轭点,则根据 (i) 与 (iii),有

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\leqslant t_1\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\chi}}. \tag{7.5.14}$$

此外,如 $\mathfrak{M}$ 沿 c 的曲率不小于(或不大于)球 S_ρ^m 的曲率 $1/\rho^2$,则 c 的第一个共轭点不迟于(或不早于) S_ρ^m 的由北极出发的正测地线的第一个共轭点,即南极,其长度为 $\pi\rho$, 由此可知,定理 7.5.2 的不等式一般是不能改进的了.

§7.6 Rauch 比较定理

定理 7.6.1 (Rauch 比较定理) 设 $\mathfrak{M}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是同维数的黎曼流形. $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$, $\tilde{c}:[0,\beta]\to\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是正则测地线. Y, $\widetilde{Y}$ 是沿 c, $\tilde{c}$ 的 Jacobi 场适合 $Y(0)=0$, $\widetilde{Y}(0)=0$ 及 $\langle Y',\dot{c}\rangle|_0=\langle\widetilde{Y}',\dot{\tilde{c}}\rangle|_0=0$, 并且 $\|Y'(0)\|=\|\widetilde{Y}'(0)\|$, $\tilde{c}$ 在 $(0,\beta)$ 没有共轭点. 若 $\mathfrak{M}$ 的沿 c 的曲率不大于沿 $\tilde{c}$ 的曲率,即

$K_\sigma\leqslant K_{\tilde{\sigma}}$ 对所有 $\sigma\in G_{c,t}$, $\tilde{\sigma}\in G_{\tilde{c},t}$, $t\in[0,\beta]$, 则有

$$\|Y(t)\|\geqslant\|\widetilde{Y}(t)\|. \tag{7.6.1}$$

当 $m=2$, 设 X 为沿正则测地线 $c:[0,\beta]\to\mathfrak{M}$ 平行移动的向量场满足 $\langle X,\dot{c}\rangle=0$ 及 $\|X\|=1$, 当 $t=0$. 对于沿 c 的 Jacobi 场 Y 满足 $\langle Y,\dot{c}\rangle=0$ 必定为 $Y=\varphi X$, 其中 $\varphi=\langle Y,X\rangle$ 是函数.此时 Jacobi 方程化为

$$\varphi''+K\varphi=0,$$

即经典的曲面上沿测地线的 Jacobi 常微分方程,其中 $K(t)$ 为

曲面在 $c(t)$ 点的 Gauss 曲率. Sturm 定理说上述方程当 $K \geqslant \chi > 0$ 时有振荡解，当 $K \leqslant 0$ 时没有振荡解，定理 7.6.1 是 Sturm 定理的推广.

我们先证若定理 7.6.1 成立，则有:

推论 7.6.2 设 $\mathfrak{M}, \widetilde{\mathfrak{M}}$ 是同维数黎曼流形，$p \in \mathfrak{M}, \tilde{p} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, $\iota: \mathfrak{M}_p \to \widetilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{p}}$ 是线性等度变换. 设 $u \in \mathfrak{M}_p$ 使得 u, ιu 分别在 Exp_p, $\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}$ 的定义域内，$\beta = \|u\| > 0$. 令直线 $\varphi, \tilde{\varphi}$: $[0, \beta] \to \mathfrak{M}_p, \widetilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{p}}$ 适合 $\varphi(t) = t\dfrac{u}{\beta}$, $\tilde{\varphi} = \iota\circ\varphi$, 并令 $c = \mathrm{Exp}_p\circ\varphi$, $\tilde{c} = \mathrm{Exp}_{\tilde{p}}\circ\tilde{\varphi}$. 若 $\tilde{c}$ 在 $(0, \beta)$ 中没有共轭点，即直线 $\tilde{\varphi}$ 的像最多在 $\tilde{\varphi}(\beta)$ 是 $\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}$ 的非常点. 当 $K_\sigma \leqslant K_{\tilde{\sigma}}$ 对所有 $\sigma \in G_{c,t}$, $\tilde{\sigma} \in G_{\tilde{p},t}$, $t \in [0, \beta]$ 成立时，有

$$\|\mathrm{Exp}_{p*}b\| \geqslant \|\mathrm{Exp}_{\tilde{p}*}\iota_* b\|, \text{ 对所有 } b \in (\mathfrak{M}_p)_u. \tag{7.6.2}$$

证 当 $u = 0$ 及 $b \in (\mathfrak{M}_p)_0$, 显而易见

$$\|\mathrm{Exp}_{p*}b\| = \|b\| = \|\mathrm{Exp}_{\tilde{p}*}\iota_* b\|.$$

当 $u \neq 0$ 及 $b \in (\mathfrak{M}_p)_u$, b 可以分解为与 u 平行和与 u 垂直的两分量之和. 据 § 7.3 的 Gauss 引理，只须证与 u 正交的分量满足 (7.6.2), 此即不妨假定 $\langle b, \mathscr{T}_u u\rangle = 0$. 令 Y, $\widetilde{Y}$ 为沿 $c, \tilde{c}$ 的 Jacobi 场适合 $Y(0) = 0$, $\widetilde{Y}(0) = 0$ 及 $Y'(0) = \mathscr{T}_u^{-1}\dfrac{b}{\beta}$, $\widetilde{Y}'(0) = \mathscr{T}_{\iota u}^{-1}\iota_*\dfrac{b}{\beta}$, 根据引理 7.2.3

$$Y(t) = \mathrm{Exp}_{p*}t\mathscr{T}_{t\frac{u}{\beta}}Y'(0), \quad \widetilde{Y}(t) = \mathrm{Exp}_{\tilde{p}*}\iota_* t\mathscr{T}_{t\frac{u}{\beta}}Y'(0) \tag{7.6.3}$$

分别是沿 c, $\tilde{c}$ 的 Jacobi 场，并满足 $\langle Y', \dot{c}\rangle|_0 = 0$, $\widetilde{Y}'(0) = \iota Y'(0)$. $\tilde{c}$ 在 $(0, \beta)$ 没有共轭点，则由定理 7.6.1 可知，以 (7.6.3) 代入 (7.6.1), 并令 $t = \beta$ 便得到 (7.6.2), 证毕.

在证明定理之前，我们先作一重要的应用. 设 $\mathfrak{M}, \widetilde{\mathfrak{M}}$ 是

同维数的黎曼流形，$p\in\mathfrak{M}$, $\tilde{p}\in\widetilde{\mathfrak{M}}$, $\iota:\mathfrak{M}_p\to\widetilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{p}}$ 是线性等度变换. J 是 R 的紧区间，$\psi:J\to\mathfrak{M}_p$ 是逐段可微曲线，ψ 与 $\tilde{\psi}=\iota\psi$ 的像点集合皆在 Exp_p, $\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}$ 的定义域中. 若 $\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}$ 在星形集合 $\{t\tilde{\psi}(s)\,|\,t\in[0,1), s\in J\}$ 中有最大秩，且 $K_\sigma\leqslant K_{\tilde{\sigma}}$ 对所有 $\sigma\in G_{c_s,t}$, $\tilde{\sigma}\in G_{\tilde{c}_s,t}$, $t\in[0,\beta_s]$, $s\in J$, 满足 $\beta_s=\|\psi(s)\|>0$, 其中 c_s, $\tilde{c}_s:[0,\beta_s]\to\mathfrak{M}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是正则测地线满足 $c_s(t)=\mathrm{Exp}_p\left(t\dfrac{\psi(s)}{\beta_s}\right)$, $\tilde{c}_s(t)=\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}\left(t\dfrac{\tilde{\psi}(s)}{\beta_s}\right)$, 则有

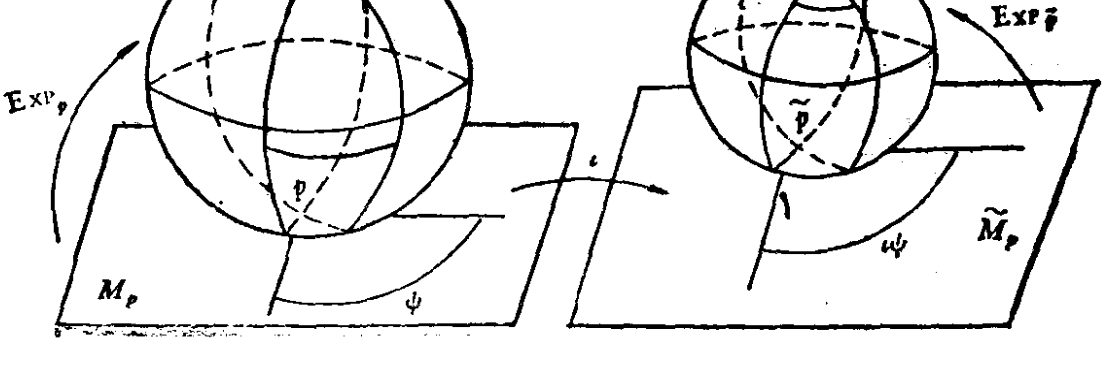
$$L(\mathrm{Exp}_p\circ\psi)\geqslant L(\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}\circ\tilde{\psi}).\tag{7.6.4}$$

如果把 $\mathfrak{M}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 的情形互换，即若 Exp_p 在 $\{t\psi(s)\,|\,t\in[0,1), s\in J\}$ 有最大秩，且 $K_\sigma\geqslant K_{\tilde{\sigma}}$ 对所有 σ, $\tilde{\sigma}$ 如前，则有

$$L(\mathrm{Exp}_p\circ\psi)\leqslant L(\mathrm{Exp}_{\tilde{p}}\circ\tilde{\psi}).\tag{7.6.5}$$

实际上，我们不妨假定 ψ 可微分，否则可作参数的变换使之如此（引理 7.3.2）. 根据弧长的定义，我们只须证明 $\|\dot{\mathrm{Exp}}_p\circ\psi(s)\|\geqslant\|\dot{\mathrm{Exp}}_{\tilde{p}}\circ\iota\psi(s)\|$，此即 $\|\mathrm{Exp}_{p*}\circ\dot{\psi}(s)\|\geqslant\|\mathrm{Exp}_{\tilde{p}*}\circ\iota_*\dot{\psi}(s)\|$，而根据 (7.6.2) 是成立的.

不等式(7.6.4)—(7.6.5)给与 Rauch 定理的几何意义，对于一流形 $\mathfrak{M}$ 具有恒大于（或小于）$\widetilde{\mathfrak{M}}$ 的曲率，为了比较须把一曲线经 Exp_p 表示为 $\mathfrak{M}_p$ 中的曲线，这必须在 p 点的充分小邻域才满足. 在下面的例子中，$\mathfrak{M}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是两个曲率不同的球面的情形.



现在来证明定理. 据 § 7.2, $\langle Y, \dot{c}\rangle = \langle \widetilde{Y}, \dot{\tilde{c}}\rangle = 0$. 若 $\widetilde{Y} = 0$, 则必须 $Y = 0$, 因为 $\|Y'(0)\| = \|\widetilde{Y}'(0)\|$. 现设 Y 不是零向量场. 取 $t_0 \in (0, \beta)$ 而作沿 $c, \tilde{c}$ 的平行移动向量场 $X, \widetilde{X}$ 满足 $X(t_0) = Y(t_0)$, $\widetilde{X}(t_0) = \widetilde{Y}(t_0)$. 由于 t_0 不是 c 也非 $\tilde{c}$ 的共轭点, $Y(t_0) \neq 0$, $\widetilde{Y}(t_0) \neq 0$. 令 $\iota: \mathfrak{M}_{c(0)} \to \widetilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{c}(0)}$ 是线性等度变换适合 $\iota\dot{c}(0) = \dot{\tilde{c}}(0)$, 及 $\iota X(0)/\|X(0)\| = \widetilde{X}(0)/\|\widetilde{X}(0)\|$, 由于 $\langle X, \dot{c}\rangle = \langle \widetilde{X}, \dot{\tilde{c}}\rangle = 0$, 这是可以的. 根据 (7.5.4), 可用平行移动定义一同构 $\Phi: \mathfrak{V}'_c \to \mathfrak{V}'_{\tilde{c}}$. 沿 $\tilde{c}$ 作一 Jacobi 场 Z 适合 $Z(0) = 0$, $Z(t_0) = (\Phi Y)|_{t_0}$. 根据 ι 的选取, $\widetilde{Y}(t_0)$ 与 $Z(t_0)$, 因而 $\widetilde{Y}$ 与 Z 是线性相关, 即

$$Z = \sqrt{\frac{\langle Z, Z\rangle|_{t_0}}{\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_{t_0}}}\widetilde{Y} \text{ 及 } Z' = \sqrt{\frac{\langle Z, Z\rangle|_{t_0}}{\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_{t_0}}}\widetilde{Y}',$$

因而有 $\langle Z, Z'\rangle|_{t_0}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_{t_0} = \langle Z, Z\rangle|_{t_0}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}'\rangle_{t_0}$.

由于

$$\langle Z, Z\rangle|_{t_0} = \langle \Phi Y, \Phi Y\rangle|_{t_0} = \langle Y, Y\rangle|_{t_0},$$

于是我们有

$$\langle Z, Z'\rangle|_{t_0}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_{t_0} = \langle Y, Y\rangle|_{t_0}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}'\rangle|_{t_0}. \tag{7.6.6}$$

令 $c_0 = c|_{[0,t_0]}$, $\tilde{c}_0 = \tilde{c}|_{[0,t_0]}$. 根据 (7.4.4) 及 (7.5.7)

$$\langle Y, Y'\rangle|_{t_0} = I(Y|_{c_0}, Y|_{c_0}) \geqslant I(\Phi Y|_{\tilde{c}_0}, \Phi Y|_{\tilde{c}_0}).$$

根据 (7.4.6), 由于 $\tilde{c}_0$ 没有共轭点, 故有

$$I(\Phi Y|_{\tilde{c}_0}, \Phi Y|_{\tilde{c}_0}) \geqslant I(Z|_{\tilde{c}_0}, Z|_{\tilde{c}_0}) = \langle Z, Z'\rangle|_{t_0}.$$

由此可得出

$$\langle Y, Y'\rangle|_{t_0} \geqslant \langle Z, Z'\rangle|_{t_0}. \tag{7.6.7}$$

此外, 由于

$$\lim_{t\to 0}\frac{\langle Y, Y\rangle|_t}{\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_t} = \lim_{t\to 0}\frac{D\langle Y, Y\rangle|_t}{D\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_t} = \lim_{t\to 0}\frac{DD\langle Y, Y\rangle|_t}{DD\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle|_t}$$

$$= \lim\frac{\langle Y, Y''\rangle|_t + \langle Y', Y'\rangle|_t}{\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}''\rangle|_t + \langle \widetilde{Y}', \widetilde{Y}'\rangle|_t} = \frac{\|Y'(0)\|^2}{\|\widetilde{Y}'(0)\|^2} = 1 \tag{7.6.8}$$

及由 (7.6.6) 及 (7.6.7) 可知

$$\langle Y, Y'\rangle|_t\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_t - \langle Y, Y\rangle|_t\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}'\rangle|_t \geqslant 0.$$

此式在 $t = t_0$ 成立，而 t_0 是 $(0, \beta)$ 中任一点，因而对任一 $t \in (0, \beta)$ 成立，亦即

$$D\frac{\langle Y, Y\rangle|_t}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle|_t} \geqslant 0, \quad t \in (0, \beta).$$

由上不等式与(7.6.8)可知

$$\left.\frac{\langle Y, Y\rangle}{\langle \tilde{Y}, \tilde{Y}\rangle}\right|_t = \frac{\|Y(t)\|^2}{\|\tilde{Y}(t)\|^2} \geqslant 1, \qquad (7.6.9)$$

而不等式(7.6.1)可由(7.6.9)得出对所有 $t \in [0, \beta]$ 皆成立。定理 7.6.1 得证。

应用比较定理于多复变函数论的最新的研究可参阅文献[1]。

§7.7 Hadamard-Cartan 定理

设$\mathfrak{M}$是黎曼流形. $\mathfrak{M}$的开子集称为**简单的**，若G中任两点最多有一G中的测地线通过之，显然一简单开集G的开子集也是简单的. 开集G称为**凸的**，若两点 $p, q \in G$ 有一在G中的测地线c过p与q使 $L(c) = \rho(p,q)$. G 称为**强凸的**，若G为凸的，并且任一δ球 $B_\delta(p) \subset G$ 也是凸的. 显然G是强凸则G的任一凸子集也是强凸. 根据定理 6.5.6，任一点 $p \in \mathfrak{M}$，有一$\delta > 0$ 使 $B_\delta(p)$ 是强凸. 令 $r(p)$ 是所有这些δ的上确界，称为**凸半径**. 令$\hat{R}$是R中把$+\infty$与$-\infty$看作同一点的紧致化，于是映照 $r: \mathfrak{M} \to \hat{R}$ 是连续的. 实际上，若有一点 $p_0 \in \mathfrak{M}$，使 $r(p_0) = \infty$，则所有$\mathfrak{M}$中的球都是凸的，因而 $r(p) = \infty$ 对所有 $p \in \mathfrak{M}$. 若设 $r(p)$ 对所有 $p \in \mathfrak{M}$ 为有限，则对任一点 $q \in B_{r(p)}(p)$ 有

$$|r(p)-r(q)|\leqslant\rho(p,q). \qquad (7.7.1a)$$

实际上，$B_{r(p)}(p)$ 是强凸，故 $B_{r(p)-\rho(p,q)}(q)$ 是强凸，因此 $r(q)\geqslant r(p)-\rho(p,q)$，此即 $r(p)-r(q)\leqslant\rho(p,q)$. 若 $r(q)>r(p)$，则 $p\in B_{r(q)}(q)$，于是有 $r(q)-r(p)\leqslant\rho(p,q)$，即无论如何，(7.7.1a) 总成立，由此可知，$r:\mathfrak{M}\to\hat{R}$ 是连续的.

引理 7.7.1 设$\mathfrak{M}$是连通的黎曼流形，ρ 是距离函数，$p\in\mathfrak{M}$. 若$\mathfrak{M}_p$中的 0 点为心的球 U_ε 是在指数映照的定义域中，则 $\mathfrak{M}$ 中的球 $B_\varepsilon(p)$ 中任一点 q 能以测地线 $c(t)=\mathrm{Exp}_p(tv)$ 联 p 与 q 使得 $L(c)=\rho(p,q)$. 特别是 $\mathrm{Exp}_p:U_\varepsilon\to B_\varepsilon(p)$ 是满射. 此外，任与 $\delta\in(0,\varepsilon)$，闭球$\overline{B_\delta(p)}$是紧的.

证 对 $\delta\in(0,\varepsilon)$，令 C_δ 是 $q\in B_\delta(p)$ 的集合使得 p 能与 q 以一测地线 $c_q=\mathrm{Exp}_p(tv)$ 相连且 $L(c_q)=\rho(p,q)$. 我们要证 C_δ 是紧的且 $C_\delta=\overline{B_\delta(p)}$. 设 q 是 C_δ 的聚点，即有 C_δ 的点串 $q_\nu\to q$. 对每一 q_ν 找一 $v_\nu\in\overline{U}_\delta\subset\mathfrak{M}_p$ 及测地线 $c_\nu(t)=\mathrm{Exp}_p(tv_\nu)$，使得 $\mathrm{Exp}_p(v_\nu)=q_\nu$ 且 $\|v_\nu\|=\rho(p,q_\nu)$. 不妨假定，v_ν 在紧集 $\overline{U}_\delta$ 中收敛为 v，否则取一子串使之如此. 据引理 6.6.4，测地线 $c(t)=\mathrm{Exp}_p\,tv=\lim\mathrm{Exp}_p\,tv_\nu$ 是联 p 与 q，且 $\|v\|=\rho(p,q)$，故 C_δ 是紧的. 考虑 $\delta\in(0,\varepsilon)$ 使得 $C_\delta=\overline{B_\delta(p)}$的集合为 A. 根据定理 6.5.6，A包含 0 点的一邻域，A必定是$(0,\varepsilon)$中的一闭区间，因为若有 $\delta_0\in(0,\varepsilon)$ 使 $C_{\delta_0}=\overline{B_{\delta_0}(p)}$，则对 $0<\delta<\delta_0<\varepsilon$ 亦有 $C_\delta=\overline{B_\delta(p)}$；又若 $C_\delta=\overline{B}_\delta$ 对 $0<\delta<\delta_0<\varepsilon$，则 $B_{\delta_0}(p)\subset C_{\delta_0}$，而由 C_{δ_0}是闭的，故可知 $C_{\delta_0}=\overline{B_\delta(p)}$. 如果能证明$A$是开的，则引理得证.

设 $\delta_0\in A$. 令 $r(q)$，$q\in\mathfrak{M}$ 是 q 点的凸半径. 已知 $r:\mathfrak{M}\to\hat{R}$ 是连续，因此在紧集 $C_{\delta_0}=\overline{B_{\delta_0}(p)}$ 中 $r(q)$ 有一极小值 η'，取 $0<\eta<\min(\eta',\varepsilon-\delta_0)$，我们要证 $C_{\delta_0+\eta}=$

$\overline{B_{\delta_0+\eta}(p)}$. 由于 $C_{\delta_0+\eta}$ 是闭的，这只要证明 $B_{\delta_0+\eta}(p)\subset C_{\delta_0+\eta}$，而由于 $\overline{B_{\delta_0}(p)}\subset C_{\delta_0+\eta}$，故只须证明 $B_{\delta_0+\eta}(p)-\overline{B_{\delta_0}(p)}\subset C_{\delta_0+\eta}$. 现设 $q\in B_{\delta_0+\eta}(p)-\overline{B_{\delta_0}(p)}$. 考虑一串由 p 到 q 的曲线 $c_\nu:[\alpha,\beta]\to\mathfrak{M}$ 适合 $\lim\limits_{\nu}L(c_\nu)=\rho(p,q)$，并且 $L(c_\nu)\leqslant\rho(p,q)+\dfrac{1}{\nu}$. 由于 $\rho(p,q)>\delta_0$，必有 $t_\nu\in[\alpha,\beta]$ 使得 $\rho(p,c_\nu(t_\nu))=\delta_0$. 点串 $\tilde{q}_\nu=c_\nu(t_\nu)$ 在紧集合 $\overline{B_{\delta_0}(p)}-B_{\delta_0}(p)$ 有一聚点 $\tilde{q}$，因此我们可以断言

$$\rho(p,q)=\rho(p,\tilde{q})+\rho(\tilde{q},q). \tag{7.7.1b}$$

实际上，首先 $L(c_\nu)\geqslant\rho(p,\tilde{q}_\nu)+\rho(\tilde{q}_\nu,q)$，因此有

$$\frac{1}{\nu}+\rho(p,q)\geqslant\rho(p,\tilde{q}_\nu)+\rho(\tilde{q}_\nu,q),$$

故

$$\rho(p,q)\geqslant\rho(p,\tilde{q})+\rho(\tilde{q},q).$$

由三角不等式知，(7.7.1b)成立. 由 $\tilde{q}$ 的构造可知，$\rho(p,\tilde{q})=\delta_0$. 因此有一由 p 到 $\tilde{q}$ 的正则测地线 $c:[0,\delta_0]\to\mathfrak{M}$. 由于 $\rho(p,q)<\delta_0+\eta$，由(7.7.1)可知，$\rho(\tilde{q},q)<\eta$，即在强凸球 $B_\eta(\tilde{q})$ 中，因此存在正则测地线 $\tilde{c}:[\delta_0,\gamma]\to\mathfrak{M}$ 由 $\tilde{q}$ 到 q 其长度为 $\rho(\tilde{q},q)$. c 和 $\tilde{c}$ 一起构成逐段正则的曲线 $\bar{c}$ 由 p 到 q 适合 $L(\bar{c})=\rho(p,q)$. 据引理 6.5.5，$\bar{c}$ 是正则测地线，这证明 $q\in C_{\delta_0+\eta}$，引理得证.

引理 7.7.2 若黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 有一点 p 使得映照 Exp_p 在整个 $\mathfrak{M}_p$ 定义，则 $\mathfrak{M}$ 是完备的.

证 设 q_ν 是一 Cauchy 串，则 $\rho(p,q_\nu)$ 是有界的. 对每一 q_ν，据引理 7.7.1 有一测地线 c_ν 联 p 到 q_ν 使得 $L(c_\nu)=\rho(p,q_\nu)$，即存在 $v_\nu\in\mathfrak{M}_p$ 使 $\|v_\nu\|=\rho(p,q_\nu)$ 及 $\mathrm{Exp}(v_\nu)=q_\nu$. v_ν 在 $\mathfrak{M}_p$ 中有界，因此 v_ν 在 $\mathfrak{M}_p$ 中有收敛点 v，因而点串 q_ν 收敛为 $\mathrm{Exp}(v)$，引理得证.

设$\mathfrak{M}$是m维微分流形，$p, q \in \mathfrak{M}$. 设 $c_0, c_1: [\alpha, \beta] \to \mathfrak{M}$ 是以p点为始点q为终点的逐段可微曲线。连续映照 $H: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \to \mathfrak{M}$ 称为在c_0与c_1间的一(p, q)**同伦**，若映照 $H_s: [\alpha, \beta] \to \mathfrak{M}$ 其中 $H_s(t) = H(t, s)$ 是由p到q的逐段光滑曲线[1]对所有 $s \in [0, 1]$，并且 $H_0 = c_0, H_1 = c_1$. 当$\mathfrak{M}$是一黎曼流形时，弧长函数 $s \to L(H_s)$ 是连续的. 若有一c_0与c_1之间的(p, q)同伦，c_0与c_1称为(p, q)**同伦**. 显而易见，(p, q)同伦是由p到q所有逐段可微曲线 $[0, 1] \to \mathfrak{M}$ 的集合 $\Omega_{p,q}$ 的一等价关系.

引理 7.7.3 设$\mathfrak{M}$是黎曼流形，$p \in \mathfrak{M}$. 设 Exp_p 在 $\mathfrak{M}_p$ 的球邻域 U_ε 定义且在 U_ε 之秩为 m. 设 $v, w \in \mathfrak{M}_p$, $v \neq w$ 是在 Exp_p 的定义域中适合 $\mathrm{Exp}_p(v) = \mathrm{Exp}_p(w) = r$. 设 $t_0 \in [0, 1]$, $q = \mathrm{Exp}(t_0 v)$. $c_0: [0, 1] \to \mathfrak{M}$ 是由p到q的测地线 $c_0(t) = \mathrm{Exp}(t t_0 v)$, $c_1: [0, 1] \to \mathfrak{M}$ 是由p经r到q的逐段的测地线，$c_1(t) = \mathrm{Exp}(2tw)$，当 $t \in [0, 1/2]$，而 $c_1(t) = \mathrm{Exp}([1 - (2t-1)(1-t_0)]v)$，当 $t \in [1/2, 1]$. 又设 $H: [0, 1] \times [0, 1] \to \mathfrak{M}$ 是 c_0 与 c_1 间一(p, q)同伦，则存在 $s_0 \in [0, 1]$ 使得

$$L(c_0) + L(H_{s_0}) \geqslant 2\varepsilon. \tag{7.7.2}$$

若$\mathfrak{M}$是完备的，并且曲率满足 $K_\sigma \leqslant \lambda$，其中 $\lambda > 0$，σ 是任一切平面，则能选取 $\varepsilon = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$. 因为据 Hopf-Rinow 定理，$\mathrm{Exp}_p$ 在整个 $\mathfrak{M}_p$ 有定义，而据 Morse-Schönberg 定理知，Exp_p 在 $\mathfrak{M}_p$ 的0点为心、$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ 为半径的球中有最大秩. 一般情形下，ε 不能大于 $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$，例如$\mathfrak{M} = S^m_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ 时，c_0 与 c_1 一起组成

---

1) 注意：与§6.7的定义比较，这里假定 H_s 是逐段光滑的.

一大圆，p 是北极，q 是南极便为此情形。

证 若所有 $s\in[0, 1]$ 使 $L(c_0)+L(H_s)<2\varepsilon$，则由函数 $s\to L(H_s)$ 的连续性可知，有一数 $\delta>0$，使

$$L(c_0)+\sup_{s\in[0,1]}L(H_s)<2\delta<2\varepsilon, \qquad (7.7.3)$$

特别是

$$L(c_0)=L(H_0)<\delta. \qquad (7.7.4)$$

据假设，Exp 在 U_ε 是最大秩。如在定理 7.3.4 的证明中把变分提升一样，令 J_0 为如是的 $\eta\in[0, 1]$ 的集合，使得 $H|_{[0,1]\times[0,\eta]}$ 能提升为映照 $\Phi:[0, 1]\times[0,\eta]\to U_\delta$，即 $\mathrm{Exp}\circ\Phi=H|_{[0,1]\times[0,\eta]}$，而 $\Phi_s:[0, 1]\to U_\delta$ 是由 0 到 t_0v，$\Phi_s(t)=\Phi(t, s)$ 对所有 $s\in[0, \eta]$。由(7.7.4)可知，J_0 在 $[0,1]$ 是非空的开间隔。我们可以断言，J_0 在 $[0,1]$ 是闭的，因而 $J_0=[0, 1]$。这是因为 $[0, \eta)\subset J_0$，故所有 $\Phi([0, 1]\times[0, \eta))$ 的聚点在 $\bar{U}_\delta\subset U_\varepsilon$中，且能把曲线 H_η 提升成为 $\bar{U}_\delta$ 使得$\Phi_\eta(t)=\lim_{s\to\eta}\Phi_s(t)$，因为 Exp_p 在 $\Phi([0, 1]\times[0, \eta))$ 的边界点是最大秩。Φ_η 必然在 U_δ 之内。如若不然，必有一 $t_1\in[0, 1]$ 使 $\Phi_\eta(t_1)=\delta$，而根据引理 7.3.3 可知，$L(c_0)+L(H_\eta)\geqslant 2\delta$，此与(7.7.3)相矛盾。这证明$H$能提升在 U_δ 中，特别是 $H_1=c_1$ 是由 0 到 t_0v 的曲线 Φ_1 的提升，即 $\mathrm{Exp}\circ\Phi_1=c_1$。由此可知，$\Phi_1(t)=2tw$，当 $t\in[0, 1/2]$，而 $\Phi_1(t)=[1-(2t-1)\times(1-t_0)]v$，当 $t\in[1/2, 1]$，于是 $t=1/2$ 时 $v=w$，这与假设矛盾。引理得证。

我们称$p\in\mathfrak{M}$ 为黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 的**极点**，若 $\mathfrak{M}_p$ 的指数映照 Exp_p 在整个 $\mathfrak{M}_p$ 中有定义，且秩皆为最大的。如果 $\mathfrak{M}$ 存在一个极点，根据引理 7.7.2，$\mathfrak{M}$ 是完备的。

引理 7.7.4 设$\mathfrak{M}$是单连通的黎曼流形，p 是$\mathfrak{M}$的极点。则指数映照 $\mathrm{Exp}_p:\mathfrak{M}_p\to\mathfrak{M}$ 是一微分同胚，因而 $\mathfrak{M}$ 微分同胚

于 R^n.

证 由于 Exp_p 是局部微分同胚，并根据引理 7.7.1 是满射，故只须证明 Exp_p 是内射。假如有 $v, w \in \mathfrak{M}_p, v \neq w$，但 $\mathrm{Exp}(v) = \mathrm{Exp}(w) = q$，则根据引理 7.7.3，取 $t_0 = 1, c_0:[0,1] \to \mathfrak{M}$, $c_1:[0, 1] \to \mathfrak{M}$, $c_0(t) = \mathrm{Exp}(tv)$, $c_1(t) = \mathrm{Exp}(2tw)$ 当 $t \in [0, 1/2]$; $c_1(t) = q$，当 $t \in [1/2, 1]$. 取 $H:[0, 1] \times [0, 1] \to \mathfrak{M}$ 是(p, q)同伦，则对每一 $\varepsilon > 0$，有 $s_0 \in [0, 1]$使 $L(c_0) + L(H_{s_0}) \geqslant 2\varepsilon$. 由于映照 $s \to L(H_s)$ 是连续的，故 $\{L(H_s) | s \in [0, 1]\}$ 是有界的，当 ε 充分大，就得出矛盾。引理得证。

定理 7.7.5 (Hadamard-Cartan 定理)

设 $\mathfrak{M}$ 是完备的单连通黎曼流形，其维数 $m \geqslant 2$，并且对 $\mathfrak{M}$ 的任一切平面 σ 截曲率 $K_\sigma \leqslant 0$，则对任一点 $p \in \mathfrak{M}$, Exp_p: $\mathfrak{M}_p \to \mathfrak{M}$ 是微分同胚，特别是 $\mathfrak{M}$ 同胚于 R^m.

证 据 Morse-Schönberg 定理 (ii)，Exp_p 在每一点 $p \in \mathfrak{M}$ 皆是最大秩，因而任一点皆是$\mathfrak{M}$的极点，而由上面引理立刻得出定理.

设$\mathfrak{M}$是连通的黎曼流形. A是$\mathfrak{M}$的子集. $\rho_A = \sup\limits_{p,q \in A} \rho(p,q)$ 称为A的**直径**. 对于 $\mathfrak{M}$ 的紧子集 A，ρ_A 是有限的. 由于 ρ 是连续，故必有 $p_0, q_0 \in A$，使 $\rho(p_0, q_0) = \rho_A$.

定理 7.7.6 (Myers) 设$\mathfrak{M}$是完备的黎曼流形，维数 $m \geqslant 2$. 若对 $\mathfrak{M}$ 的所有切平面 σ 有 $K_\sigma \geqslant \chi > 0$，则对任两点 $p, q \in \mathfrak{M}$，有

$$\rho(p,q) \leqslant \rho_M \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\chi}}.$$

证 据定理 6.2.2，存在由 p 到 q 的正则测地线 c:$[0, \beta] \to \mathfrak{M}$ 使得 $L(c) = \rho(p, q)$，因而据引理 7.4.1，c 在$[0, \beta)$没

有共轭点，据 Morse-Schönberg 比较定理(iii)，$\rho(p, q) = \beta \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\chi}}$，因此得出定理。

参 考 文 献

[1] R. E. Greene and H. Wu, Function theory on manifolds which posses a pole, Springer-Verleg, Berlin (1979).

[2] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Myers, Riemannsche Geometrie im Grossen, Berlin, Springer (1968).

[3] J. Milnor, Morse theory, Princeton, N. J., The Univ. Press (1963).

[4] H. E. Rauch, A contribution to Riemannian geometry in the large, *Ann. of Math.*, 54, 28 (1951).

[5] J. L. Synge, The first and second variation of length in Riemannian space, *Proc. London Math. Soc.*, 25, 247 (1962).

[6] J. Weber, General relativity and gravitational waves, New York, Interscience (1961).